

Electromagnétisme dépendant du temps.

1.

On étudie ici les champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$ variables créés par des charges et des courants eux-mêmes variables.

I - Equations de Maxwell

1. Equation de Maxwell - Faraday

a) Un rappel utile.

cf. Figure 1. (gauche)

- * Le champ électrique créé par le générateur provoque le passage du courant. Il agit tout le long du fil.

$$U = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$$

avec la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, on trouve $U = Ri$

cf. Figure 1. (milieu)

- * $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s}$

Quand Φ dépend du temps, un courant induit apparaît,

on écrit $e = Ri$ avec $e = -\frac{d\Phi}{dt}$ (loi de Faraday) comme

s'il y avait un générateur de fem e .

Il existe donc un champ électrique qui pousse les porteurs le long du fil.

Il est tel que $e = \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$

b) Loi de Faraday et induction de Neumann.

$\vec{E}$ n'est ici pas à circulation conservatrice, ce n'est pas un champ électrostatique.

ici $\text{rot } \vec{E} \neq \vec{0}$

Calcul :

cf. Figure 1 (droite)

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} &= - \frac{d\Phi}{dt} \\ &= - \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{S}} \vec{B}(\eta, t) \cdot d\vec{S} \\ &= - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\eta, t) \cdot d\vec{S}\end{aligned}$$

$$\text{or } \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (\text{Stokes})$$

$$\text{donc } \int_{\mathcal{S}} \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \int_{\mathcal{S}} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

L'égalité a lieu quelque soit la courbe Γ fermée et quelque soit la surface $\mathcal{S}$.

On en déduit :

$$\forall \eta, \forall t, \text{rot } \vec{E}(\eta, t) = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}(\eta, t)$$

équation de
Maxwell
Faraday

MF

elle exprime localement la loi de Faraday sur l'induction

2. Equation de Maxwell-Ampère

a) Nécessité

cf. Figure 2.

la boucle émet des charges radialement : $\vec{j} = j(r, t) \vec{u}_r$

$\vec{j}$ n'est pas à flux conservatif, ses courants ne sont pas permanents.

Tout plan contenant $(\eta, \vec{u}_x)$ est un plan de symétrie des sources

$\vec{B}$ lui est orthogonal donc $\vec{B}(\eta, t) = \vec{0}$

donc $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$

Pourtant $\mu_0 \vec{j}(\eta, t) \neq \vec{0}$

On a donc pas ici $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$

Ce problème arrive dès que les courants ne sont pas permanents.

$$\text{Si } \vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

$$\text{alors } \text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \mu_0 \text{div} \vec{j}$$

$$\text{or } \text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$$

$$\text{donc } \text{div} \vec{j} = 0$$

$$\text{Mais dans le cas général, } \text{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \text{ pas toujours nul !}$$

En régime variable, nous devons adapter l'équation de Maxwell - Ampère

b) Courant de déplacement

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

équation de Maxwell - Ampère

MA

$$\text{on note } \vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \text{ le courant de déplacement}$$

Le problème soulevé dans a) est ainsi réglé.

En effet : $\text{div}(\vec{\nabla} \times \vec{B})$:

$$0 = \mu_0 \left(\text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \text{div} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\text{div} \vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{E} = 0$$

$$\text{or } \text{div} \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{donc } \text{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad (\text{équation de continuité})$$

Les équations de Maxwell sont compatibles avec l'équation de conservation.

3. Récapitulation

On passe de la forme locale à la forme intégrale
par les formules de GO et Stokes.

ex: $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d)$

donc $\int_{\mathcal{V}} \nabla \times \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\mathcal{V}} \mu_0 (\vec{j} + \vec{j}_d) \cdot d\vec{S}$

donc $\oint_r \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S}}_{I_e} + \mu_0 \underbrace{\int_{\mathcal{V}} \vec{j}_d \cdot d\vec{S}}_{I_{de}}$

→ Dans le th. d'Ampère : ajouter l'intensité de déplacement enlacé.

$$I_{de} = \int_{\mathcal{V}} \vec{j}_d \cdot d\vec{S}$$

⇒ En régime variable, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un tout, c'est le champ électromagnétique. Ce champ est créé à la fois par les charges et les courants.

Les théorèmes sur les symétries s'appliquent en considérant bien toutes les sources (charges et courants)

Astuce :

si $\vec{X} = \nabla \times \vec{Y}$

les plans de symétrie de $\vec{X}$ sont les plans d'antisymétrie de $\vec{Y}$
et inversement.



Des sources qui créent un champ magnétique variable $\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$
créent aussi un champ électrique. (TF)

Des sources qui créent un champ électrique variable $\left(\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right)$
créent aussi un champ magnétique (TA)

II - les régimes quasi-stationnaires

3

1. les régimes statiques

Pour des champs constants $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$ et $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$

$$\begin{cases} \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} & \Pi G \\ \text{rot } \vec{E} = \vec{0} & \Pi F \end{cases} \quad \text{électrostatique}$$

$$\begin{cases} \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} & \Pi A \\ \text{div } \vec{B} = 0 & \Pi - \emptyset \end{cases} \quad \text{magnétostatique}$$

les régimes statiques sont souvent plus simples.

2. ARQS magnétique

a) Exemple

cf. Figure 3

Dans le solénoïde, on fait passer du courant $I(t)$ de fréquence f ,

$$\omega = 2\pi f, \quad T = \frac{1}{f}$$

On cherche $\vec{E}(r, t)$, $\vec{B}(r, t)$

En magnétostatique on a vu (dans le solénoïde) : $\vec{B} = \vec{B}_0 = \mu_0 n I(t) \vec{u}_z$

Comme $\vec{B}$ dépend du temps, $\vec{E}$ est non nul.

plan du sandwich

$(r, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan d'antisymétrie des courants sources

donc $\vec{E} = E(r, \theta, z, t) \vec{u}_\theta$

invariances par rotation et translation : $\vec{E} = E(r, t) \vec{u}_\theta$

$$\text{Utilisons } \oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r E(r, t)$$

$$\Phi = B(t) \pi r^2$$

$$\vec{D}: \quad 2\pi x E = -\pi x^2 \frac{dB}{dt}$$

$$= -\pi x^2 \frac{dB_0}{dt}$$

$$E_1 = -\frac{x}{2} \frac{dB_0}{dt} = -\frac{x}{2} \mu_0 n \frac{dI}{dt}$$

$\vec{B}_0$ est un résultat de magnétostatique, son utilisation ici est une approximation qui néglige $\vec{E}$ dépendant du temps.

On pose $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}_2$ ↖ associé à $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\text{rot } \vec{B}_2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ou $\oint \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{de}$

- $\int_{\gamma} \vec{B}_2 \cdot d\vec{\ell} = \ell B_2(x, z)$

- $I_{de} = \int_{\gamma} \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot d\vec{s} = \int_0^x \epsilon_0 \left(-\frac{x'}{2} \frac{dB_0}{dt} \right) (-1) \ell dx'$

$$= \epsilon_0 \frac{d^2 B_0}{dt^2} \ell \frac{x^2}{4}$$

Alors : $\ell B_2 = \epsilon_0 \ell \frac{x^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dt^2} \mu_0$

$$B_2 = \mu_0 \epsilon_0 \frac{x^2}{4} \frac{d^2 B_0}{dt^2}$$

$$B_2 = \frac{x^2}{4c^2} \frac{d^2 B_0}{dt^2}$$

"ça vaut tous les coups de théâtre, c'est mieux que les farberies de scapin"

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

Ce calcul perturbatif est valable si $|B_2| \ll |B_0|$

ODG :

$$|B_2| \approx \frac{x^2}{4c^2} \omega^2 |B_0|$$

$$|B_2|_{\max} \approx \frac{a^2}{4c^2} \omega^2 |B_0|$$

$$|B_2|_{\max} \ll |B_0| \quad \text{ssi} \quad \frac{a^2 \omega^2}{4c^2} \ll 1$$

$$\frac{a^2}{c^2 T^2} \ll 1$$

$$a \ll cT \quad \text{ou} \quad \frac{1}{T} = f \ll \frac{c}{a}$$

AN: $c = 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ $a = 0, 1 \text{ m}$

4.

$f \ll 3 \text{ GHz}$

b) Généralisation

ARQS magnétique: cf. poly

Dans l'ARQS magnétique, on néglige dans les équations de Maxwell $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ pour utiliser les équations de la magnétostatique. Mais on garde $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ qui explique l'induction.

C'est le cadre théorique de l'étude de l'induction.

On applique aussi la loi des noeuds, les courants sont à flux conservatif. Ceci est compatible avec $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ (vu dans I.2.a))

la condition $a \ll cT$ s'écrit aussi $\frac{a}{c} \ll T$, l'onde électromagnétique traverse le système en un temps négligeable.

3. ARQS électrique (HP)

a) Exemple

cf. Figure 4

condensateur: $\sigma(t)$ $\vec{E}, \vec{B}$?

$$\vec{E} \approx \vec{E}_0 = \frac{\sigma}{\epsilon_0} (-\vec{u}_z)$$

nut dans le condensateur
(cable - courant)

Comme $\vec{E}$ dépend du temps et existe un champ magnétique.

Dans le condensateur, $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = \mu_0 I_{de}$$

$(\Pi, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources donc $\vec{B} = B(r, z, t) \vec{u}_\theta$

Γ : cercle de rayon r

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B(r, z, t)$$

$$I_{de} = \int_0^r \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = \int \epsilon_0 \frac{dE_0}{dt} \vec{u}_z \cdot dS \vec{u}_z = \epsilon_0 \frac{dE_0}{dt} \pi r^2$$

$$d: 2\pi r B = \mu_0 \epsilon \pi r^2 \frac{dE_0}{dt}$$

$$B_1 = \frac{\pi}{2c^2} \frac{dE_0}{dt}$$

le résultat $\vec{E}_0$ relève de l'électrostatique, et néglige un terme proportionnel à $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_z + E_2 \vec{u}_z$$

$$\text{avec } \text{rot } \vec{E}_2 = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{ou } \oint_{\gamma} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$= h E_2(r, t)$$

$$\begin{aligned} \text{or } \Phi &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = - \int_0^a \frac{\pi^2}{2c^2} \frac{dE_0}{dt} h dr \\ &= -\frac{h}{2c^2} \frac{\pi^2}{2} \frac{dE_0}{dt} \end{aligned}$$

$$\text{P: } h E_2 = \frac{h}{4c^2} \pi^2 \frac{d^2 E_0}{dt^2}$$

$$E_2 = \frac{\pi^2}{4c^2} \frac{d^2 E_0}{dt^2}$$

comme dans 2a) $|E_2| \ll |E_0|$ si $a \ll cT$.

b) Généralisation

ARQS électrique : cf. poly

III - Energie électromagnétique

1. Deux exemples simples de localisation de l'énergie électromagnétique

a) Localisation de l'énergie dans un condensateur plan.

cf. Figure 4

En électrostatique : $\vec{E} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_x$ et $\vec{E} = -\frac{U}{e} \vec{u}_x$

$$C = \frac{\epsilon_0 S}{e}$$

$$E_e = \frac{1}{2} C U^2$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{e} \times (eE)^2$$

$$= eS \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

volume
où règne E

on interprète ce facteur comme
l'énergie volumique associée
à la présence du champ

$$u_e = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}]$$

b) Localisation de l'énergie dans un solénoïde

cf. Figure 3

Rappel : $B = \mu_0 n I$

$L = \mu_0 n^2 S l$

longueur bobine

$$E_m = \frac{1}{2} L I^2$$

$$= \frac{1}{2} \mu_0 n^2 S l \times \left(\frac{B}{\mu_0 n} \right)^2$$

$$= S l \frac{B^2}{2 \mu_0}$$

volume
où règne B

on interprète ce facteur comme
une énergie volumique associée
à la présence de B

$$u_m = \frac{B^2}{2 \mu_0} \quad [\text{J} \cdot \text{m}^{-3}]$$

Dans ces deux exemples, on affirme que les champs portent de l'énergie, ici de manière uniforme (ou nul à l'extérieur)

2. Transport et localisation de l'énergie électromagnétique

Non seulement l'énergie peut être localisée mais en plus elle peut voyager (penser aux oscillations d'un circuit RLC)

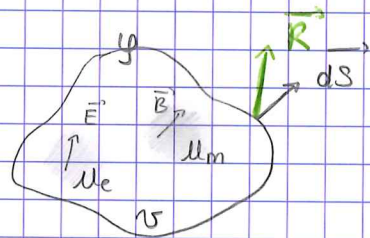
a) Expression a priori d'un bilan

$\mathcal{V}$ contient l'énergie

énergie
électromagnétique

$$\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_e + \mathcal{E}_m$$

$$\mathcal{E}_{em} = \int_{\mathcal{V}} (\mathcal{U}_e + \mathcal{U}_m) d\tau$$



Le transport de l'énergie est décrite par un vecteur $\vec{R}$

Pendant dt , $\mathcal{V}$ est traversée par l'énergie

$$\delta W_{cédée} = \oint_{\mathcal{V}} \vec{R} \cdot d\vec{S} dt$$

Par ailleurs, les champs perdent de l'énergie en la donnant aux charges :

$$\text{Pendant } dt : \quad \delta W = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt$$

$$\text{bilan : } d\mathcal{E}_{em} = -\delta W_{cédée} - \delta W$$

$$\text{avec } d\mathcal{E}_{em} = \mathcal{E}_{em}(t+dt) - \mathcal{E}_{em}(t)$$

$$= \frac{d\mathcal{E}_{em}}{dt} \times dt$$

$$\text{on pose } \mathcal{U}_{em}(\vec{r}, t) = \mathcal{U}_e(\vec{r}, t) + \mathcal{U}_m(\vec{r}, t)$$

$$d\mathcal{E}_{em} = \int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} d\tau dt$$

bilan :

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} d\tau dt = - \int_{\mathcal{V}} \vec{R} \cdot d\vec{S} dt - \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau dt$$

$$\int_{\mathcal{V}} \frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} d\tau = - \int_{\mathcal{V}} \text{div } \vec{R} d\tau dt - \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

c'est vrai pour tout $\mathcal{V}$ donc :

$$\frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} = -\text{div } \vec{R} - \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{div } \vec{R} + \frac{\partial \mathcal{U}_{em}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

On reconnaît une équation de bilan local avec termes sources

b) Ce bilan fonctionne !

6

$$\text{MF: } \vec{\text{rot}} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\cdot \frac{-\vec{B}}{\mu_0}$$

$$\text{MA: } \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\cdot \frac{\vec{E}}{\mu_0}$$

$$\frac{\vec{E} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}}{\mu_0} - \frac{\vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{E}}{\mu_0} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{j} \cdot \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

puis on ajoute
membre à membre.

↳ but: faire apparaître $\vec{j} \cdot \vec{E}$

→ formule d'analyse vectorielle: $\text{div}(\vec{A} \wedge \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{A} - \vec{A} \cdot \vec{\text{rot}} \vec{B}$

$$\text{donc } - \frac{\text{div}(\vec{E} \wedge \vec{B})}{\mu_0} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) + \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\text{div} \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{B^2}{2\mu_0} + \frac{\epsilon_0 E^2}{2} \right) = -\vec{j} \cdot \vec{E}$$

Par identification avec a) :

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$u_{\text{em}} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

c) Ce qu'il faut savoir

cf. poly

Rq: En magnétostatique, l'énergie E_m s'identifie à $\frac{1}{2} LI^2$

comme dans un
micro-onde

3. Exemples de transport d'énergie

Dans un four micro-onde, des champs électriques et magnétiques transportent de l'énergie. La matière absorbe cette énergie c'est le terme $\vec{j} \cdot \vec{E}$ "le poulet"

a) Fil résistif

$$\vec{B}(\pi) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \vec{u}_\theta$$

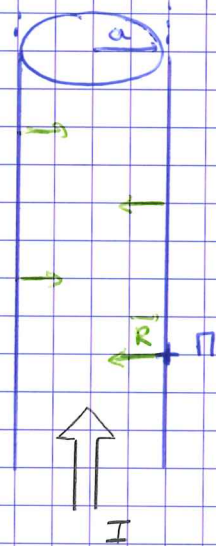
cf magnétostat.

$$\vec{E}(\pi) = \frac{\vec{j}}{\delta} = \frac{I}{\pi a^2} \frac{1}{\delta} \vec{u}_z$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

$$= - \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \delta} \vec{u}_r$$

"infini mais de longueur l"



Puissance qui entre dans le fil :

$$P_{\text{entre}} = \int_V \vec{R} \cdot (-dS \vec{u}_r)$$

$$= \int_V \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \delta} dS$$

$$= \frac{I^2}{2\pi^2 a^3 \delta} \times 2\pi a l$$

$$= \frac{l}{\pi a^2 \delta} I^2$$

$$= R I^2$$

La puissance transportée au travers de la paroi du fil s'y dissipe entièrement par effet joule.

b) Condensateur en régime variable.

cf. Figure 4.

Dans l'ARQS électrique, nous avons :

$$\vec{E} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_z = - \frac{Q}{\pi a^2 \epsilon_0} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} \approx \frac{\mu_0}{2c^2} \frac{dE}{dt} \vec{u}_\theta$$

(cf II.3)

$$\frac{1}{c^2} = \epsilon_0 \mu_0$$

$$\vec{R}(r=a) = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E \vec{u}_z \wedge B \vec{u}_\theta}{\mu_0} = - \frac{EB}{\mu_0} \vec{u}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{R}(x=a) &= -\frac{E}{\mu_0} \frac{a}{2} \mu_0 \frac{dE}{dt} \vec{u}_n \\ &= -\frac{E a}{2} \frac{dE}{dt} \vec{u}_n\end{aligned}$$

Puissance qui entre dans le condensateur :

$$\begin{aligned}P_{\text{entre}} &= \int \vec{R} \cdot (-dS \vec{u}_n) \\ &= \frac{\epsilon_0 E a}{2} \frac{dE}{dt} \times 2\pi a e \\ &= \pi a^2 e \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \right) \\ &= \frac{d}{dt} (\underbrace{u_e}_{\text{}} \times \pi a^2 e) \\ &= \frac{d}{dt} \mathcal{E}_e\end{aligned}$$

$$\text{ou } d\mathcal{E}_e = P_{\text{entre}} dt$$

d'énergie transportée au travers de la surface latérale s'accumule dans le condensateur.

