

vagues

Une onde est la propagation de proche en proche au fil du temps de la variation d'une grandeur physique.

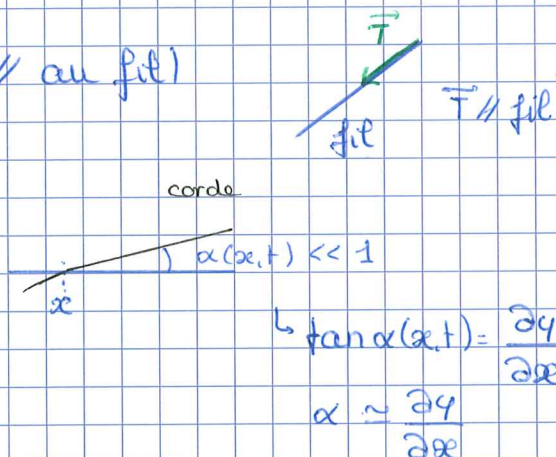
I - Mise en équation de quelques phénomènes

Classique 1. Ondes transversales dans une corde tendue

a) Hypothèses

cf. Figure 1.

- mouvement uniquement selon $\vec{u}_y$: $y(x, t)$
- onde transversale (mvt $\perp$ à la direction dans laquelle l'onde se propage)
- pas de raideur. (tension $\parallel$ au fil)
- pas de dissipation
- corde peu inclinée, petits mouvements
- on néglige la pesanteur $\vec{g}$
- avant mouvement, la tension est T_0



b) Mise en équations

cf. Figure 2

tronçon $[x, x+dx]$, $dm = \mu dx$

tension $\vec{T}(x, t)$: exercée par la droite sur la gauche

PFD: $dm \vec{a} = \vec{T}(x+dx, t) - \vec{T}(x, t)$

$\vec{u}_x$: $0 = T(x+dx, t) \cos \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \cos \alpha(x, t)$ (1)

$\vec{u}_y$: $dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T(x+dx, t) \sin \alpha(x+dx, t) - T(x, t) \sin \alpha(x, t)$ (2)

masse linéique
[kg·m⁻¹]

de l'abscisse
 x

$$(1) : d(T \cos \alpha) = 0$$

$$T \cos \alpha = \text{cte}(t) = T_0$$

$$T = \frac{T_0}{\cos \alpha}$$

$$(2) : dm \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \tan \alpha(x+dx, t) - T_0 \tan \alpha(x, t)$$

$$\mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \tan(\alpha)}{\partial x} \times dx$$

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

EDP qui détermine l'évolution de la vibration.

classique 2. Vibrations longitudinales d'une tige élastique

a) Hypothèses :

cf. Figure 3

$$\text{On admet } F = E S \frac{\partial L}{L_0}$$

module d'Young [Pa]

ex : acier : $E = 200 \text{ GPa}$

b) Mise en équations

cf. Figure 4

* vibration longitudinale (// à la direction dans laquelle l'onde se propage)

* dilatation :

repos : $[x, x+l]$ → longueur l

mut : $[x + s(x, t), x + l + s(x+l, t)]$ → longueur $l' = l + s(x+l, t) - s(x, t)$

$$\delta l = l' - l = s(x+l, t) - s(x, t)$$

dilatation relative: $\frac{\delta l}{l} = \frac{s(x+l, t) - s(x, t)}{l} \approx \frac{\partial s(x, t)}{\partial x}$ 2

efforts: $F(x, t) = ES \frac{\partial s}{\partial x}(x, t)$

* dynamique: tronçon $[x, x+dx]$

$$dm = \rho S dx$$

PFD: sur $\vec{dx}$:

$$dm \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x, t) = F(x+dx, t) - F(x, t)$$

$$\rho S dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x, t) = dx \frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\rho S \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = ES \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

EDP qui permet de prédire l'évolution de s

3. Chaîne d'oscillateurs couplés

a) Hypothèses

cf. Figure 5.

- onde longitudinale: $s_n(t)$
- frottements, gravité négligés.

b) Mise en équations

PFD sur la balle de rang n : droite
gauche

$$m \frac{d^2 s_n}{dt^2} = F_{dn} + F_{gn}$$

$$= k(l_{eq} + s_{n+1} - s_n - l_0) - k(l_{eq} + s_n - s_{n-1} - l_0)$$

$$= k(s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n)$$

e) Approximation des milieux continus

cf. Figure 5 bis

On introduit : $s : x, t \rightarrow s(x, t)$

$$t_q : s(na, t) = s_n(t)$$

Nous avons déjà vu deux fois que $\frac{s_{n+1} + s_{n-1} - 2s_n}{a^2} \approx \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(na, t)$

(série Taylor !

$$s_{n+1} = s(na + a, t)$$

$$s_{n-1} = s(na - a, t)$$

↪ supp a petit

l'équation du mouvement devient :

$$m \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = k a^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{m}{k a^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = 0$$

Le passage à la limite continue suppose $a \ll \lambda$ (longueur d'onde ou échelle spatiale de variation de s)

d) Lien avec les ondes dans un barreau élastique

cf. Figure 6

On décrit le métal cristallin comme une série de masses liées par des ressorts.

- Sur la section S , il y a $\frac{S}{a^2}$ atomes.

- Quand le barreau se dilate de δL , chaque ressort se dilate de $\frac{\delta L}{N}$ avec $N = \frac{L_0}{a}$

Tous ensemble, ils exercent :

3.

$$F = k \frac{\delta L}{N} \times \frac{S}{a^2}$$

on prend en compte
que les ressorts
du bout.

$$= k \frac{a}{L_0} \frac{S}{a^2} \delta L$$

$$\text{or } F = ES \frac{\delta L}{L_0}$$

par identification

$$E = \frac{k}{a}$$

macro

micro

$$\text{Par ailleurs : } \rho = \frac{m}{a^3}$$

Dans 2 b) et 3 c) on a la même équation et $\frac{\rho}{E} = \frac{m/a^3}{k/a} = \frac{m}{ka^2}$

4. Signaux électriques dans une ligne bifilaire

a) Hypothèses et modèles à constantes réparties

cf. Figure 7

+/- condensateur

Entre les deux conducteurs existent des effets capacitifs et des effets inductifs.

Le câble est si long qu'on est hors ARQS donc $i(x, t)$ et $u(x, t)$

Un élément infinitésimal possède une capacité $dC = \Gamma dx$ et

une auto-inductance $dL = \Lambda dx$

$[H \cdot m^{-1}]$

$[F \cdot m^{-1}]$

admis : $\Lambda \Gamma = \mu_0 \epsilon_0$ (vide)

ou $\Lambda \Gamma = \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r$ (dans un matériau)

b) Mise en équations

loi des mailles : $u(x, t) = u(x + dx, t) + dL \frac{\partial i}{\partial t}$

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = -\Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \quad (1)$$

bi des noeuds : $i(x, t) = i(x + dx, t) + dC \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)$

$$i(x + dx, t) - i(x, t) = - \rho dx \frac{\partial u}{\partial t}(x + dx, t)$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = - \rho \frac{\partial u}{\partial t} \quad (W)$$

On découple

$$\frac{\partial(x)}{\partial x} : \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = - \Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t}$$

$$\frac{\partial(y)}{\partial t} : \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} = - \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\text{d'où } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \rho \Lambda \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{idem pour } i)$$

Cette EDP avec des conditions de bord portant sur u ou i permet de prédire l'évolution.

II - Equation de d'Alembert

1. Identification de la célérité

Dans les 4 exemples de I on a une fonction $f(x, t)$ qui vérifie :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0$$

→ équation de d'Alembert

on voit que $[x^2] = [c^2 t^2]$

$$\text{donc } [c] = \frac{[x]}{[t]} \text{ en m} \cdot \text{s}^{-1}$$

c est la célérité des ondes.

$$\text{* corde : } c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$$

$$\text{AN : } T_0 = 10 \text{ N}$$

$$\mu = 10 \text{ g/m}$$

$$c = 32 \text{ m/s}$$

$$\text{* barreau : } c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

$$\text{AN : acier}$$

$$c = 5 \text{ km/s}$$

* ressorts

$$c = \sqrt{\frac{k}{m}} a$$

4.

* câble

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu \Gamma}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r}} = \frac{c_{\text{vacuüm}}}{\sqrt{\epsilon_r}} = 2 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

L'équation de d'Alembert est un modèle idéal qui décrit les ondes les plus simples

2. Ondes progressives

Soit $P_+ : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

2 fois dérivable

$$u \mapsto P_+(u)$$

Alors $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$

est solution de l'équation de d'Alembert

$$x, t \mapsto f(x, t) = P_+(x - ct)$$

Vérification :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = P_+'(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = P_+''(x - ct)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -c P_+'(x - ct)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = (-c)^2 P_+''(x - ct) = c^2 P_+''(x - ct)$$

$$\text{donc } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = P_+''(x - ct) - \frac{1}{c^2} \times c^2 P_+''(x - ct) = 0$$

de même, toute fonction de la forme $P_-(x + ct)$ est solution.

Nous admettons : toute solution de l'équation de d'Alembert

$$\text{s'écrit : } f(x, t) = P_+(x - ct) + P_-(x + ct)$$

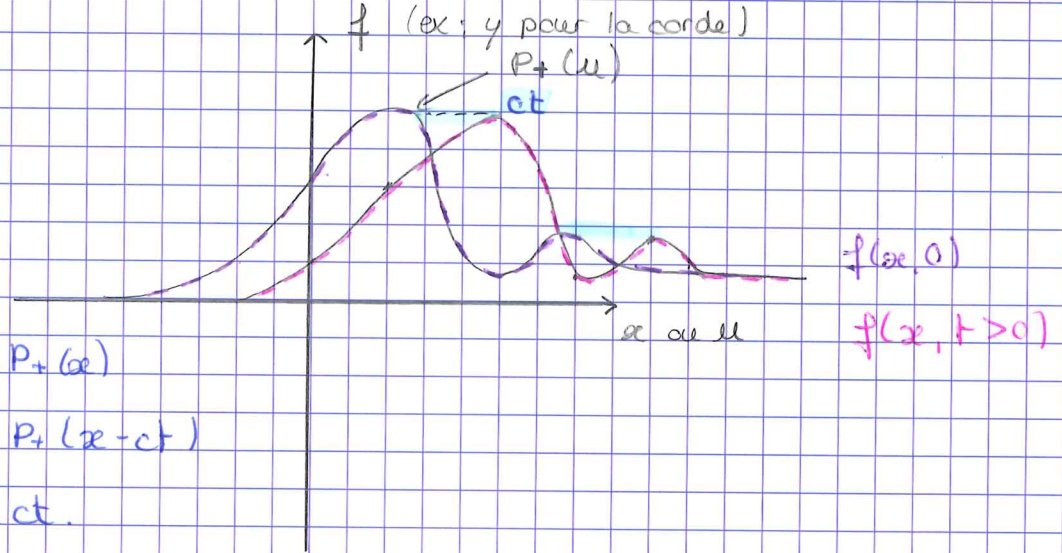
Le terme P_+ représente une onde progressive avançant vers les x croissantes

" P_-

"

vers les x décroissantes

Dans le cas où $f(x, t) = P_+(x - ct)$



à $t=0$, $f(x, 0) = P_+(x)$

à $t > 0$, $f(x, t) = P_+(x - ct)$

idem, décalé de ct .

La vibration se propage sans déformation vers la droite à la vitesse c .
C'est pareil, mais vers la gauche pour le terme P_- .

3. Ondes progressives harmoniques (=monochromatiques)

On se restreint à P_+ , progressive vers la droite pour une onde progressive harmonique (OPH), $P_+(u) = A \cos(ku + \varphi)$

$$f(x, t) = A \cos(k(x - ct) + \varphi)$$

$$= A \cos(kx - kct + \varphi)$$

on pose $\omega = ck$ car f est solution de l'éq de d'Alembert

$$f(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

pulsation spatiale ↙ pulsation ↘

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{période} \quad \omega = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad \text{période spatiale}$$

On a une double périodicité, spatiale et temporelle : les deux sont liées.

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega} c = cT = \frac{c}{\nu}$$

On appelle phase : $\varphi = kx - \omega t + \varphi$

On peut l'utiliser pour trouver la vitesse c :

5.

$$\varphi = \text{cte} = \varphi_0 \quad kx - \omega t + \varphi = \varphi_0$$

$$x = \frac{\omega t}{k} + \frac{\varphi_0 - \varphi}{k}$$

On retrouve ainsi que l'onde avance à la vitesse $c = \frac{\omega}{k}$.

4. Ondes stationnaires

a) Définition

on appelle onde stationnaire (OS) une fonction $f(x,t) = G(x)H(t)$

Par séparation des variables, on montre qu'elle est solution de l'équation de d'Alembert ssi :

$$G(x) = A \cos(kx + \varphi) \quad \text{pas les mêmes que tout à l'heure}$$

$$H(t) = B \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = ck$$

$$f(x,t) = A' \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$$

b) Visualisation

cf. Figure 8

* On appelle nœud de vibration un point tel que : $\forall t, f(x,t) = 0$

$$\text{càd } \cos(kx + \varphi) = 0$$

$$kx + \varphi = \frac{\pi}{2} + n\pi$$

$$x_n = \frac{\pi}{2k} + \frac{n\pi - \varphi}{k}$$

$$x_n = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\pi}{2k} - \frac{\varphi}{k}$$

$$x_{n+1} - x_n = \frac{\lambda}{2}$$

* Les ventres ont une amplitude de vibration maximale, ils sont définis par $\cos(kx + \varphi) = \pm 1$

$$kx + \varphi = l\pi \quad l \in \mathbb{Z}$$

$$x'_l = \frac{l\pi}{k} - \frac{\varphi}{k}$$

$$x'_e = \frac{l\lambda}{2} - \frac{\varphi}{k}$$

$$x'_{l+1} - x'_l = \frac{\lambda}{2}$$

Entre 2 noeuds ou 2 ventres successifs, la distance est $\frac{\lambda}{2}$.

c) Lien avec les ondes progressives harmoniques.

$$f(x, t) = A' \cos(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi)$$

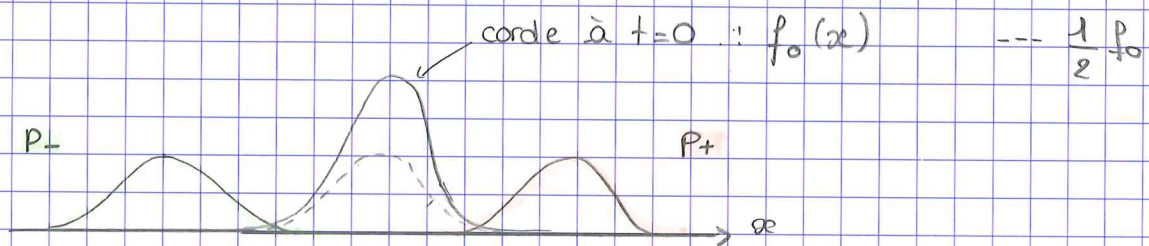
$$= \frac{A'}{2} \cos(kx + \underbrace{\omega t}_{=ck} + \varphi + \psi) + \frac{A'}{2} \cos(kx - \omega t + \varphi - \psi)$$

$$= \frac{A'}{2} \cos(k(x+ct) + \varphi + \psi) + \frac{A'}{2} \cos(k(x-ct) + \varphi - \psi)$$

Une OS est la somme de 2 OPH de même amplitude voyageant en sens inverse.

III - Etude de mouvements particuliers

1. Corde infinie pincée.



$$\text{CI: } \forall x, t=0, f(x, 0) = f_0(x) \quad (1)$$

$$\text{et } \forall x, t=0, \frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0 \quad (2) \quad (\text{pas de vitesse initiale})$$

Comme solution de l'équation de d'Alembert, f s'écrit :

$$f(x, t) = P_+(x-ct) + P_-(x+ct)$$

$$(1) \quad f_0(x) = P_+(x) + P_-(x)$$

$$(2) \quad 0 = -c P'_+(x) + c P'_-(x) \Rightarrow P'_+ = P'_-$$

$$\forall u, P_+(u) = P_-(u) + \text{cte}$$

6

$$(1) f_0 = P_+ + P_- - \text{cte}$$

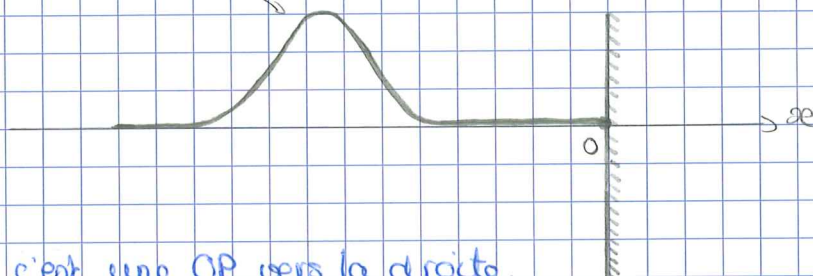
$$P_+ = \frac{f_0}{2} + \frac{\text{cte}}{2}$$

$$P_- = \frac{f_0}{2} - \frac{\text{cte}}{2}$$

$$f(x, t) = \frac{1}{2} f_0(x - ct) + \frac{1}{2} f_0(x + ct)$$

2. Réflexion d'une OP sur un nœud

$$(1) f_0(x) \text{ à } t=0$$



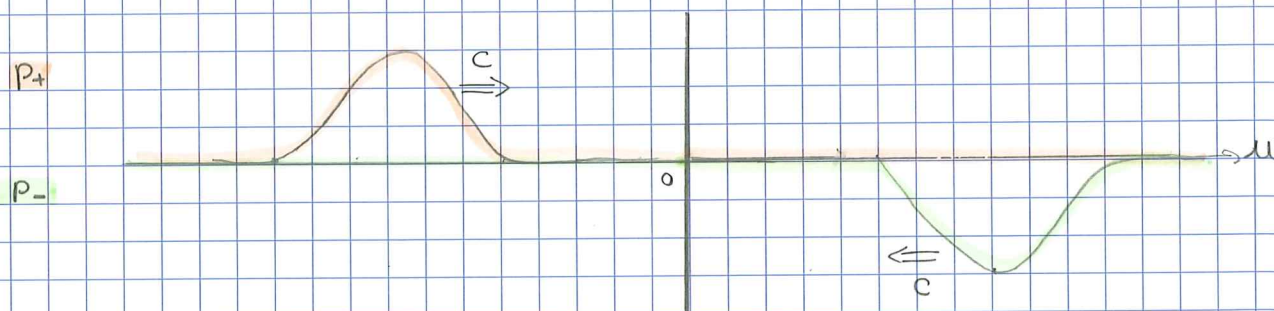
(2) A $t=0$, c'est une OP vers la droite

Pour $x < 0$ et $t \geq 0$, f est de la forme :

$$f(x, t) = P_+(x - ct) + P_-(x + ct)$$

$$(2) \forall x < 0, P_-(x) = 0$$

$$(1) \forall x < 0, f_0(x) = P_+(x) + P_-(x) = P_+(x)$$



la condition de bord (corde nœud) s'exprime par :

$$\forall t, f(0, t) = 0 \quad \text{donc} \quad P_+(-ct) + P_-(ct) = 0$$

$$P_+(-u) + P_-(u) = 0$$

$$P_+(-u) = -P_-(u)$$

→ imaginer la suite : l'onde se réfléchit et repars en sens inverse en étant se retourner



3. Réflexion d'une OPH sur un nœud.

Onde incidente :

$$f_i(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \varphi) \quad \text{avec } \omega = ck$$

→ trouver l'onde réfléchi :

à cause de d'Alembert

$$f_r(x, t) = A' \cos(k'x + \omega't + \varphi') \quad \text{avec } \omega' = ck'$$

$$\text{Nœud en } x=0 : \forall t, f_i(0, t) + f_r(0, t) = 0$$

$$A \cos(-\omega t + \varphi) + A' \cos(\omega't + \varphi') = 0$$

$$\text{on en déduit } \omega' = \omega \quad \text{donc } k' = \frac{\omega'}{c} = \frac{\omega}{c} = k$$

$$\text{et } A' = -A \quad \text{et } \varphi' = -\varphi \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{pas la seule possibilité} \end{array} \right.$$

$$f_r = -A \cos(kx + \omega t - \varphi)$$

Souvent, on admet $\omega' = \omega$ et donc $k' = k$.

La superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchi donne une OS.

4. Modes propres.

On appelle mode propre une OS compatible avec les CB dans un problème borné.

→ on s'intéresse à une corde fixée aux deux extrémités



$$f(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \psi) \quad \text{avec } \omega = ck$$

$$\text{CB} \quad * \forall t, f(0, t) = 0$$

$$* \forall t, f(L, t) = 0$$

$$\sin \varphi = 0$$

$$\sin(kL) = 0$$

$$\varphi = 0$$

$$kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N}^*$$

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{n\pi} L = \frac{2L}{n}$$

$$k = \frac{n\pi}{L}$$

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{ck}{2\pi}$$

$$f_n = n \frac{c}{2L}$$

Seules des OS possédant ces fréquences particulières $\neq$ sont possibles : on les appelle fréquences propres et les solutions :

$$f(x, t) = A \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi t}{L} + \psi\right)$$

sont les modes propres.

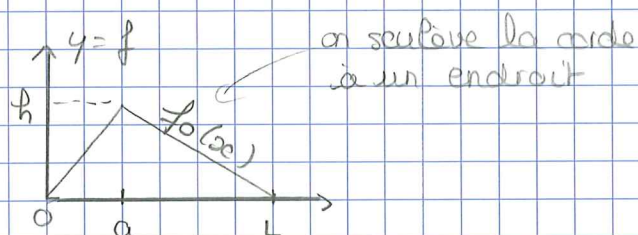
cf. Figure 3

Le mode de rang n possède n ventres

5. Etude d'un mouvement quelconque grâce aux modes propres (HP).

Un mode propre s'observerait pour une condition initiale bien particulière, rarement vue.

Une CI typique est plutôt de la forme suivante :



Avec les mêmes CB que dans 4., le mouvement s'écrit comme une combinaison linéaire de modes propres.

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos(2\pi f_n t + \psi_n)$$

Par linéarité, cette combinaison est solution de l'équation de d'Alembert.

Les CI déterminent les A_n et les ψ_n

• CI. $t=0$ $\frac{\partial f}{\partial t}(x, 0) = 0$

$$\sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \times 2\pi f_n \sin(\psi_n) = 0$$

$$\forall n, \psi_n = 0$$

° CI $f(x, 0) = f_0(x)$

$$\sum_n A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = f_0(x)$$

Les A_n sont des coefficients de Fourier

On obtient :

$$A_n = \frac{2EL^2}{\pi^2 a(l-a)} \times \frac{1}{n^2} \times \sin\left(\frac{n\pi a}{L}\right)$$

En acoustique musicale, le terme $n=1$ donne la fréquence de la note jouée $f_1 = \frac{c}{2L}$ et $n=2, 3, 4, \dots$ sont

les harmoniques $f_n = n f_1$

parce que
si somme mal

Musicalement on souhaite éliminer l'harmonique de rang 7.

$$A_7 = 0 \quad \sin\left(\frac{7\pi a}{L}\right) = 0 \quad \frac{7\pi a}{L} = \pi \quad a = \frac{L}{7}$$

6. Oscillations forcées d'une corde fixée à une extrémité.

cf. Figure 11.

En $x = -L$, le vibreur impose $f(-L, t) = f_0 \cos(\omega t)$

Solutions en OS : $f(x, t) = A \sin(kx + \varphi) \cos(\omega t + \varphi)$

avec $\omega = ck$ donc $k = \frac{\omega}{c}$

CB : ° $f(0, t) = 0 \quad \sin \varphi = 0 \quad \varphi = 0$

° $f(-L, t) = f_0 \cos(\omega t)$

$$A \sin(-kL) \cos(\omega t + \varphi) = f_0 \cos(\omega t)$$

$\varphi = \pi$ pour éliminer le - et $A \sin(kL) = f_0$

$$A = \frac{f_0}{\sin kL}$$

Selon la valeur de ω imposée par le vibreur, A est plus ou moins grand.

A devient très fort, il y a résonance si $\sin kL \rightarrow 0$

donc si $kL = n\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{si } k = \frac{n\pi}{L} \quad \text{si } \omega = \frac{nc\pi}{L} \quad \text{si } f = \frac{nc}{2L}$

La résonance a lieu lorsque la fréquence du vibreur ω est l'une des fréquences propres.

A la différence d'un oscillateur amorti, on a ici une série de fréquences propres donc une série de résonance.

En pratique A reste borné à cause des phénomènes dissipatifs.

Autre vision :

si $\sin kL = 0$ on peut avoir $f_0 = 0$ et $A \neq 0$

on a alors un nœud à chaque extrémité

