

Ondes acoustiques dans les fluides

1.

des ondes acoustiques sont une vibration d'un fluide accompagnée de variation de pression.

$$\begin{array}{ccccc} f < 20\text{Hz} & \leq & f & \leq & 20\text{kHz} < f \\ \text{infrasons} & & \text{audible} & & \text{ultrasons} \end{array}$$

I - Equation de propagation

1. Approximation acoustique

fluide au repos : $P_0, \rho_0, \vec{v}_0 = \vec{0}$

en présence du son :

$$P = P_0 + p$$

$$p \ll P_0$$

$$\rho = \rho_0 + \delta\rho$$

$$\delta\rho \ll \rho_0$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}$$

$$v \ll c$$

celérité de l'onde

$p, \delta\rho, \vec{v}$ sont proportionnels à l'amplitude de l'onde et très petits (ordre 1) et on néglige tous les termes d'ordre 2.

* Dans le modèle du fluide parfait, l'équation de Navier-Stokes (Euler):

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}}_{\text{terme convectif}} \right) = -\nabla P + \rho \vec{g}$$

on néglige le terme gravitaire

ordre 2
car contient v^2
on néglige

ODG :

$$\| (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \| \approx \frac{V^2}{\lambda}$$

ODG de $\vec{v}$

longueur d'onde

$$\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\| \approx \frac{V}{T}$$

$$\frac{\| (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \|}{\left\| \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right\|} \approx \frac{VT}{\lambda} \approx \frac{V}{c} \quad (\lambda = cT)$$

Le terme convectif est négligeable si $v \ll c$

$$(e_0 + \delta e) \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \underbrace{\vec{\nabla}}_{\text{cte}} (p_0 + p)$$

ordre 2

$$e_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = - \vec{\nabla} p \quad \text{équation d'Euler linéarisée (EL)}$$

p : la pression acoustique

* conservation de la masse :

rappel : $\vec{j} = e \vec{v}$

$$\text{div}(e \vec{v}) + \frac{\partial e}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}((e_0 + \delta e) \vec{v}) + \frac{\partial}{\partial t}(e_0 + \delta e) = 0$$

$$e_0 \text{div} \vec{v} + \frac{\partial}{\partial t}(\delta e) = 0 \quad \text{conservation linéarisée (CL)}$$

2. Hypothèse thermodynamique

On a 2 équations pour 3 champs inconnus : ça ne suffit pas !

Il faut encore caractériser la capacité du fluide à se comprimer.

$$\text{Compressibilité : } \chi_T = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_T \quad (\text{isotherme})$$

$$\chi_S = - \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S \quad (\text{isentropique})$$

En acoustique, on utilise χ_S sous l'hypothèse que les particules fluides évoluent de manière adiabatique réversible (isentropique).
C'est le modèle du fluide parfait.

Pour une particule fluide, la masse $m = eV$ est constante

$$\ln m = \ln e + \ln V$$

$$\text{On dérive : } \left. \frac{\partial}{\partial P} \right|_S \quad 0 = \frac{1}{e} \left. \frac{\partial e}{\partial P} \right|_S + \frac{1}{V} \left. \frac{\partial V}{\partial P} \right|_S$$

d'où

$$\frac{1}{e} \left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s = \chi_s$$

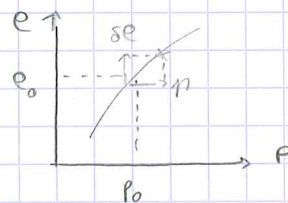
2.

Ici, les variations sont petites donc $\left. \frac{\partial e}{\partial p} \right|_s \approx \frac{\delta e}{p}$ (adiabatique réversible)

$$\chi_s \approx \frac{1}{e_0} \frac{\delta e}{p}$$

(on évalue la dérivée au point au repos d'où $e = e_0$)

ou $\delta e = e_0 \chi_s p$ (CP)



3. Equation de d'Alembert pour $p(\pi, t)$

* Cas 1d : $\vec{v} = v \vec{u}_x$ seuls x, t

(EL) $e_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x}$

(CL) $e_0 \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\delta e) = 0$

avec (CP) $\cancel{e_0} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t} (\cancel{e_0} \chi_s p) = 0$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = - \chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

$\chi_s = \text{cste}$ car on l'a déjà évalué

calcul analogue au câble coaxial.

A faire

on obtient $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - e_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$

équation de d'Alembert avec $c = \frac{1}{\sqrt{e_0 \chi_s}}$

* Cas 3d :

on reprend (EL) et (CL)

avec (CP) : $e_0 \operatorname{div} \vec{v} + \frac{\partial}{\partial t} (e_0 \chi_s p) = 0$

$$\operatorname{div} \vec{v} = - \chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$\text{div}(EL) : \rho_0 \frac{\partial (\text{div } \vec{v})}{\partial t} = -\text{div}(\vec{\nabla} p) = -\Delta p$$

on remplace $\text{div } \vec{v}$

$$\rho_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\chi_s \frac{\partial p}{\partial t} \right) = -\Delta p$$

$$\Delta p - \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

équation de D'Alembert
3d

avec $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}$

4. Valeurs numériques de c

* Gaz : équation d'état appliquée à une particule fluide

$$pV = \frac{m}{M} RT \quad \Rightarrow \quad \rho = \frac{m}{V} = \frac{Mp}{RT}$$

$$\Rightarrow \rho_0 = \frac{Mp_0}{RT_0}$$

Dans des conditions isentropiques on applique au GP l'équation de Laplace : $pV^\gamma = \text{cte}$

dérivée logarithmique par rapport à p

$$\frac{1}{p} + \gamma \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_s = 0$$

$$\chi_s = -\frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial p} \Big|_s \quad \text{donc} \quad \chi_s = \frac{1}{\gamma p}$$

ici on prend $\chi_s = \frac{1}{\gamma p_0}$ (évalué au point de repos)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\gamma p_0} \frac{Mp_0}{RT_0}}}$$

$$c = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}}$$

air $\gamma = \frac{7}{5}$ $M = 29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$

à 293 K, on trouve $c = 343 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Très bien vérifié par l'expérience ce qui valide les hypothèses.

* Liquides

Pour un liquide, ρ_0 est bien plus grand mais χ_s est bien plus petit

• eau : $c = 1,5 \text{ km/s}$ $\rho_0 = 10^3 \text{ kg/m}^3$

on en déduit $\chi_s = \frac{1}{\rho_0 c^2} = 4,6 \times 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

5. Validation des hypothèses

Au seuil de la douleur, l'amplitude de p est $A = 30 \text{ Pa}$

et l'amplitude de v est $\frac{A}{\rho_0 c} = 0,07 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (cf plus loin)

• $P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa}$ $p \ll P_0$ OK

• $c = 343 \text{ m/s}$ $v \ll c$ OK

• $\delta p = \rho_0 \chi_s p$ (CP)

$\frac{\delta p}{\rho_0} = \chi_s p = \frac{1}{\rho_0} \frac{p}{P_0} \ll 1$ $\delta p \ll \rho_0$ OK

• analysons l'hypothèse adiabatique

les particules fluides subissent des variations de température

On a négligé la diffusion thermique du chaud vers le froid.

Pendant une demi-période la diffusion est efficace sur une

longueur $L \approx \sqrt{\frac{D T}{2}}$

la diffusion est négligeable si $L \ll \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{D T}{2}} \ll \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \frac{D T}{2} \ll \frac{\lambda^2}{4}$

or $\lambda = c T$

$\frac{D T}{2} \ll \frac{c^2 T^2}{4} \Rightarrow D \ll \frac{c^2 T}{2} \Rightarrow f = \frac{1}{T} \ll \frac{c^2}{2D}$

AN: $f \ll 3 \times 10^9 \text{ Hz}$

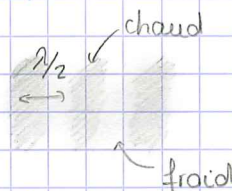
coefficient de diffusion
dans l'air

$D = 2 \times 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$

unité du point
en bâtiment

Condition largement vérifiée

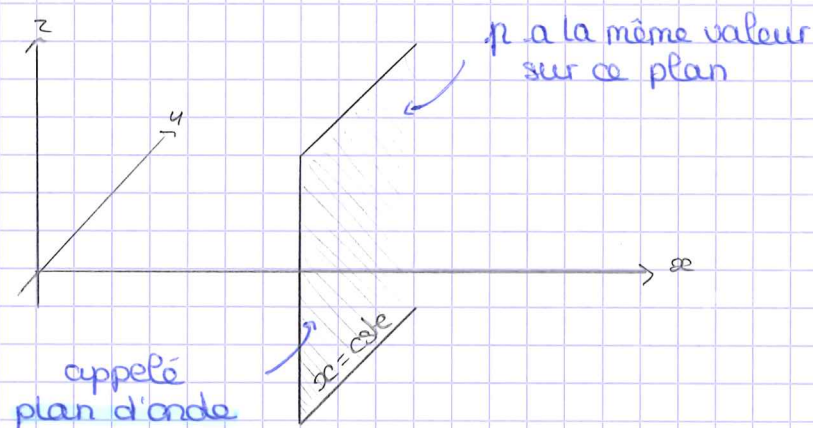
pour toutes les fréquences d'intérêt.



II - Structure des ondes planes progressives harmoniques

1. Onde plane progressive harmonique (OPPH)

- onde acoustique : $3d$ $p(x, y, z, t)$
- on appelle onde plane une vibration qui se propage en $3d$ mais qui ne dépend que d'une seule coordonnée cartésienne.
ex: $p(x, t)$ ou $p(y, t)$...



L'équation de D'Alembert devient : $\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$

Les solutions 1d vues dans un chapitre précédent s'appliquent.

OPPH : $p = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$ avec $\omega = ck$

- parfois, les plans d'onde ne sont pas des plans de coordonnées.

cf. Figure 1

Dans ce cas, l'onde dépend de $\overline{OH} = \vec{u} \cdot \vec{ON}$

$$p = p(\overline{OH}, t)$$

$$\text{OPPH : } p = A \cos(k \overbrace{\vec{u} \cdot \vec{ON}}^{\overline{OH}} - \omega t + \varphi_0)$$

on pose $\vec{k} = k\vec{u}$ vecteur d'onde (avec $k = \frac{2\pi}{\lambda}$)

$$\text{OPPH : } p = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{ON} - \omega t + \varphi_0)$$

forme la plus générale d'une OPPH en $3d$.

Les plans d'onde sont perpendiculaires à $\vec{k}$.

2. Caractère longitudinal des OPPH, impédance acoustique 4.

$$p = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$$(EL) \quad \rho_0 \frac{\partial v}{\partial t} = - \nabla p \\ = kA \sin(kx - \omega t + \varphi_0) u_x$$

on intègre par rapport au temps :

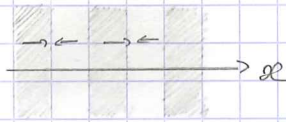
$$\vec{v} = \frac{kA}{\rho_0 \omega} \cos(kx - \omega t + \varphi_0) \vec{u}_x + \vec{K_0} f(t)$$

conste d'intégration

avant le son : le fluide est supposé au repos

$$A=0 \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{K_0} = \vec{0}$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\rho_0 c} p \vec{u}_x$$



La vibration des particules fluides est colinéaire à la direction de propagation : l'onde est longitudinale.

* impédance

→ "empêchance"

L'impédance acoustique est définie par $p = Z v$ (analogue de $U = Zi$)

Une forte impédance signifie qu'il faut une forte pression pour obtenir une petite vitesse.

* Pour une OPPH se propageant vers la droite :

$$v = \frac{p}{\rho_0 c} \quad \text{ou} \quad p = \rho_0 c v$$

dans ce cas on a $Z = \rho_0 c$

C'est l'impédance caractéristique du milieu de propagation

Un objet localisé est caractérisé par son impédance

* Pour une OPPH se propageant vers la gauche

$$v = -\frac{p}{\rho_0 c} \quad \text{ou} \quad p = -\rho_0 c v = -Z v$$

Ces relations s'appliquent pour des OPP non harmonique.

AN : air : $Z = 410 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$, eau : $Z = 1,4 \times 10^6 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$

⚠ Ces relations ne marchent pas pour des OS !

En cas de doute revenir à EL !

3. Notation complexe pour les OPPH

$p(r, t)$

$$p = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t + \varphi_0)$$

$$p = \text{Re}(\underline{p})$$

$$\left. \begin{aligned} \underline{p} &= A e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t + \varphi_0)} \\ \underline{A} &= A e^{j\varphi_0} \end{aligned} \right\} \underline{p} = \underline{A} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)}$$

De même, $\vec{v} = \text{Re}(\underline{v})$

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \underline{v_{0x}} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)} \\ \underline{v_{0y}} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)} \\ \underline{v_{0z}} e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \underline{v_{0x}} = v_{0x} e^{j\varphi_{0x}}$$

" " "

$$\vec{k} = k \vec{u} \quad \text{et} \quad \omega = ck \quad (\text{d'Alembert})$$

La notation complexe permet des calculs plus aisés dans des équations linéaires.

$$\vec{k} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \end{pmatrix}$$

$$E = e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)} = e^{j(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -j\omega E$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial x} &= jk_x E \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= jk_y E \\ \frac{\partial E}{\partial z} &= jk_z E \end{aligned} \right\} \vec{\nabla} E = j\vec{k} E$$

Quand on dérive l'exponentielle E , on peut remplacer $\vec{\nabla}$ par $j\vec{k}$

⚠ C'est seulement pour dériver l'exponentielle

• retrouvons $\omega = ck$

$$p \text{ vérifie } \Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$$

On y reporte l'OPHC

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = -k^2$$

$$-k^2 p - \frac{1}{c^2} (-j\omega)^2 p = 0$$

correspond aux deux
sens de prop. possibles

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \Rightarrow \omega^2 = c^2 k^2 \Rightarrow \omega = \pm ck$$

• retrouvons $p = Z_0 v$

$$(EL) \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

$$\rho_0 (-j\omega \vec{v}) = -jk \vec{p}$$

$$\vec{v} = \frac{k p}{\rho_0 \omega} = \frac{k u}{\rho_0 \omega} p = \pm \frac{1}{\rho_0 c} p \vec{u}$$

En projetant sur $\vec{u}$:

$$v = \pm \frac{p}{\rho_0 c}$$

III - Aspect énergétique

1. Localisation et transport de l'énergie acoustique

cf. poly

Ces grandeurs énergétiques vérifient une équation de bilan local.

$$(EL) \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

$$(CP) \quad \text{div } \vec{v} = -\chi_s \frac{\partial p}{\partial t}$$

$$(EL) \cdot \vec{v} + (CP) \times p$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 v^2 \right) + p \operatorname{div} \vec{v} = -\vec{v} \cdot \vec{\nabla} p - \chi_s \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{p^2}{2} \right)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon_0 v^2 + \frac{1}{2} \chi_s p^2 \right) + p \operatorname{div} \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} p = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (e_c + u) + \operatorname{div} (p \vec{v}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} e + \operatorname{div} \vec{R} = 0$$

2. Cas d'une OPPH

$$\eta = A \cos(kx - \omega t + \varphi)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{u}_x$$

$$\bullet u = \frac{1}{2} \chi_s p^2 = \frac{1}{2} \chi_s A^2 \cos^2 \varphi$$

$$\bullet e_c = \frac{1}{2} \epsilon_0 v^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{p^2}{\epsilon_0^2 c^2} \quad \text{or } c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \chi_s}$$

$$e_c = \frac{1}{2} \chi_s p^2 = u \quad \text{pour une OPPH : } e_c = u$$

Il y a autant d'énergie cinétique que d'énergie interne.

$$\bullet e = 2u = \chi_s p^2 \quad \Rightarrow p^2 = \frac{e}{\chi_s}$$

$$\bullet \vec{R} = p \vec{v} = \frac{p^2}{\epsilon_0 c} \vec{u}_x = \frac{1}{\epsilon_0 c \chi_s} e \vec{u}_x \quad \text{or } \epsilon_0 c \chi_s = \frac{1}{c}$$

$$\vec{R} = e c \vec{u}_x$$

Par analogie avec $\vec{j} = e \vec{v}$, on peut définir une vitesse à laquelle l'énergie avance : $\vec{v}_e = c \vec{u}_x$

3. Intensité sonore et décibels

En acoustique, l'intensité est $I = \langle R \rangle$ [$\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$]

Une échelle logarithmique est plus commode, le niveau sonore

ou
 $N_{dB} = 10 \cdot \log \frac{I}{I_0}$ [dB] avec $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ (seuil d'audition)

donc $I = I_0 10^{N_{dB}/10}$

6.

• Comparons I et $I' = 10I$

$$N'_{dB} = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{10I}{I_0} = N_{dB} + 10 \text{ dB}$$

• Comparons I et $I' = 2I$

$$N'_{dB} = 10 \log \frac{I'}{I_0} = 10 \log \frac{2I}{I_0} = N_{dB} + 10 \log 2 = N_{dB} + 3 \text{ dB}$$

"bébé qui crie"

"personne qui parle pas fort"

• Superposition de $N_{dB} = 60 \text{ dB}$ et $N'_{dB} = 3 \text{ dB}$

on sup. les 2 sons incohérents

$$I = I_0 10^6 \quad I' = I_0 10^3$$

$$I_{tot} = I + I'$$

$$= I_0 (10^6 + 10^3)$$

$$= I_0 10^6 (1 + 0,001)$$

$$N_{tot, dB} = 10 \log \frac{I_{tot}}{I_0}$$

$$= 10 \log (10^6 \times 1,001)$$

$$= 60 + 10 \log (1,001)$$

$$= 60 + 0,004 \text{ dB}$$

4. Valeurs numériques

$$p = A \cos(kx - \omega t + \varphi_0)$$

$$R = \frac{p^2}{\rho_0 c} = \frac{A^2 \cos^2 \varphi}{\rho_0 c}$$

$$I = \langle R \rangle = \frac{1}{2} \frac{A^2}{\rho_0 c}$$

au seuil d'audition : $I_0 = \frac{1}{2} \frac{A_0^2}{\rho_0 c}$

$$\Rightarrow A_0 = \sqrt{2 \rho_0 c I_0}$$

$$A_0 = 2,8 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

$$N_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{A^2}{A_0^2}$$

$$N_{dB} = 20 \log \frac{A}{A_0}$$

cf. Table 1

"c'est nos oreilles sont très bien faites"

Soit $s(r, t)$ le déplacement des particules fluides

$$v = \frac{Ds}{Dt} \approx \frac{\partial s}{\partial t}$$

$$\text{si } v = \frac{p}{\rho_0 c} = \frac{A}{\rho_0 c} \cos(\underbrace{kx - \omega t + \varphi_0}_{\varphi})$$

on intègre : $s = \frac{-A}{\rho_0 c \omega} \sin(\varphi)$

AN choisissons : $f = 1 \text{ kHz}$

$$|s| = \frac{3 \times 10^{-4}}{1,2 \times 343 \times 2\pi \times 1000} = 1,2 \times 10^{-10} \text{ m}$$

En acoustique, le déplacement vérifie $|s| \ll \lambda$.

IV - Ondes sphériques

1. Forme de l'onde sphérique harmonique

$p = p(r, \theta, \varphi, t)$ *invariance par rotation*

D'Alembert : $\Delta p - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0$

en coordonnées sphériques,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad \times r$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} (r p) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (r p) = 0$$

$F: r, t \rightarrow r p(r, t)$

F vérifie : $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0$

comme pour les cordes vibrantes en 1d.

Pour des ondes harmoniques, la solution générale est

$$F = A \cos(\omega t - kr + \varphi_0) + B \cos(\omega t + kr + \varphi_0')$$

$$p = \frac{A}{r} \cos(\omega t - kr + \varphi_0) + \frac{B}{r} \cos(\omega t + kr + \varphi_0')$$



OSDV



OSCV

Dans la suite, on se concentre sur l'onde OSDV.

(émission par un vibreur par ex).

Remarquer l'atténuation en $\frac{1}{r}$

2. Champ de vitesse

7.

$$(EL) \quad \epsilon_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -\vec{\nabla} p$$

$$p = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr + \phi_0)}$$

pour les ondes
les onde d'int
c'est possible

$$\epsilon_0 \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = -A \left(-\frac{1}{r^2} e^{j\phi} + \frac{1}{r} (-jk) e^{j\phi} \right) \vec{u}_r$$

on intègre (

$$\vec{v} = \frac{A}{\epsilon_0} \frac{1}{j\omega} e^{j\phi} \left(\frac{1}{r^2} + \frac{jk}{r} \right) \vec{u}_r + \text{Cste}$$

$$\vec{v} = \text{Re}(\vec{v})$$

$$= \frac{A}{\epsilon_0 \omega} \left(\frac{1}{r^2} \sin(\omega t - kr + \phi_0) + \frac{k}{r} \cos(\omega t - kr + \phi_0) \right) \vec{u}_r$$

or $\omega = ck$

$$\vec{v} = \frac{A}{r \epsilon_0 c} \left(\frac{\sin(\omega t - kr + \phi_0)}{kr} + \cos(\omega t - kr + \phi_0) \right) \vec{u}_r$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{u}_r + \frac{A}{\epsilon_0 c k r^2} \sin(\omega t - kr + \phi_0) \vec{u}_r$$

A la différence des ondes planes, v n'est pas en phase avec p .

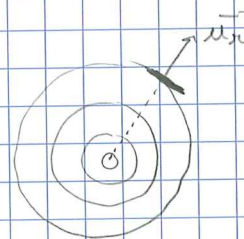
Le second terme est négligeable si $kr \gg 1 \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda} r \gg 1$

càd $r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$ donc $r \gg \lambda$

dans ce
cas là

localement, on se retrouve le comportement d'une onde plane qui se propagerait selon $\vec{u}_r$.

C'est la zone lointaine ou la zone de rayonnement.



3. Puissance rayonnée

On se place dans le cas où $r \gg \lambda$.

$$\vec{R} = \rho \vec{v} \approx \frac{\rho^2}{\epsilon_0 c} \vec{u}_r \approx \frac{A^2}{r^2} \cos^2 \phi \frac{1}{\epsilon_0 c} \vec{u}_r$$

$$I = \langle R \rangle = \frac{A^2}{\epsilon_0 c r^2} \times \left(\frac{1}{2} \right) \text{ valeur moyenne de } \cos^2$$

puissance moyenne rayonnée : $P = 4\pi r^2 I$ $\leftarrow \langle S \rangle$

$$P = \frac{2\pi A^2}{\epsilon_0 c}$$

P ne dépend pas de r , ce qui traduit la conservation de l'énergie.

Il faut savoir raisonner à l'envers, P se conserve or la surface d'une sphère croît en r^2 donc I est en $\frac{1}{r^2}$ et comme $I \propto p^2$ alors $p \propto \frac{1}{r}$.

AN: $\langle S \rangle = 1 \text{ mW}$ $r = 1 \text{ m}$

$$I = \frac{\langle S \rangle}{4\pi r^2} = 8 \times 10^{-5} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

$$\text{Ndb} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 79 \text{ dB}$$

La puissance électrique consommée par le buzzer, le haut-parleur est bien plus grande, les haut-parleurs ont un très mauvais rendement.

V - Effet Doppler

L'effet Doppler est une variation de fréquence entre un émetteur et un récepteur en déplacement l'un par rapport à l'autre.

cf. photocopié

VI - Passage d'une interface en incidence normale.

1. Conditions de passage à l'interface

cf. Figure 2

$$\begin{cases} p_i = p_i(x, t) \text{ (OPP)} \\ v_i = \frac{1}{Z_1} p_i(x, t) \end{cases} \quad \begin{cases} p_t = p_t(x, t) \text{ (OPP)} \\ v_t = \frac{1}{Z_2} p_t(x, t) \end{cases} \quad \begin{cases} p_r = p_r(x, t) \text{ (OPP)} \\ v_r = -\frac{1}{Z_1} p_r(x, t) \end{cases}$$

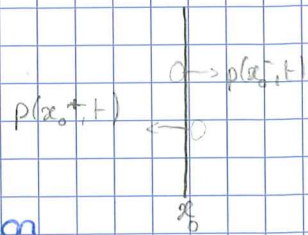
- $x < x_0$: $p = p_i + p_r$

$$v = v_i + v_r$$

8

- $x > x_0$: $p = p_t$

$$v = v_t$$



Sur l'interface p et v sont continues.

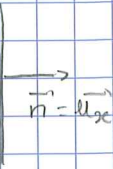
Pour p c'est une conséquence de la 3ème loi de Newton

Pour v : la condition de bord de type fluide parfait

$$\text{s'écrit } [\vec{v}(x_0^+, t) - \vec{v}(x_0^-, t)] \cdot \vec{n} = 0$$

$$v_x(x_0^-, t) = v_x(x_0^+, t)$$

Ici v se confond avec v_x



2. Coefficients de réflexion et transmission. (pour la pression)

déf :
$$r = \frac{p_r(x_0^-, t)}{p_i(x_0^-, t)}$$

réflexion

$$T = \frac{p_t(x_0^+, t)}{p_i(x_0^-, t)}$$

transmission

But : relier r et T à Z_1 et Z_2 .

- p est continue : $p_i(x_0, t) + p_r(x_0, t) = p_t(x_0, t)$ (CP)

- v est continue : $v_i(x_0, t) + v_r(x_0, t) = v_t(x_0, t)$

$$\frac{p_i(x_0, t)}{Z_1} - \frac{p_r(x_0, t)}{Z_1} = \frac{p_t(x_0, t)}{Z_2} \quad (CV)$$

$$\begin{aligned} \text{(CP)} \quad p_i & \quad \begin{cases} 1 + r = T \end{cases} \\ \text{(PV)} \times Z_1 \quad p_i & \quad \begin{cases} 1 - r = T \frac{Z_1}{Z_2} \end{cases} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} T = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \\ r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \end{cases}$$

3. Réflexion et transmission de l'intensité sonore.

$$R_i = p_i v_i = \frac{p_i^2}{Z_1}$$

$$R_t = p_t v_t = \frac{p_t^2}{Z_2}$$

$$R_r = p_r v_r = -\frac{p_r^2}{Z_1}$$

coef de transmission de l'intensité sonore : $T = \frac{R_t(x_0, t)}{R_i(x_0, t)}$

coef de réflexion de l'intensité sonore : $R = \frac{|R_r|}{R_i}$

$$T = \frac{\frac{\rho_1 c^2}{Z_1}}{\frac{\rho_2 c^2}{Z_2}} = \frac{Z_2}{Z_1} \frac{Z_1}{Z_2}$$

$$T = \frac{4 Z_1 Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2}$$

$$R = \frac{\rho_2 c^2}{\rho_1 c^2} = \pi^2$$

$$R = \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \right)^2$$

Remarque:

$$R_t = T R_i$$

$$I_t = T I_i$$

< >

$$\text{idem, } I_r = R I_i$$

La conservation de l'énergie implique : $I_i = I_r + I_t$

$$I_i = R I_i + T I_i$$

$$1 = R + T$$

à vérifier explicitement avec les exp. de R et T

Non a pas $\pi + \pi = 1$!

4. Cas particuliers et applications

* interface air / eau $Z_1 = Z_{\text{air}} = 410 \text{ SI}$ $Z_2 = Z_{\text{eau}} = 1,4 \times 10^6 \text{ SI}$

$$T = 1,2 \times 10^{-3}$$

$$R = 0,9988$$

log

$$I_t = T I_i$$

$$N_{t\text{dB}} = N_{i\text{dB}} + 10 \log T \approx N_{i\text{dB}} - 30 \text{ dB}$$

Pour l'échographie, il faut éviter l'interface air / corps humain (eau) en plaquant la sonde et en mettant du gel. Le gel assure une adaptation d'impédance.

* adaptation d'impédance

Quand $Z_1 = Z_2$ on a $R = 0$ et $T = 1$

on dit qu'il y a adaptation d'impédance, les milieux ont des impédances adaptées.

* cas où $Z_2 \gg Z_1$

$$R \rightarrow 1$$

$$T \rightarrow 0$$

$$\pi \rightarrow 1$$

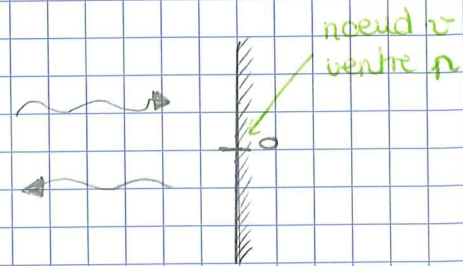
$$\tau \rightarrow 2$$

Toute l'énergie est réfléchiée, retirons le par un calcul direct.

$Z_2 \gg Z_1$ signifie que le matériau est très dur.

$$\begin{cases} p_i = A \cos(\omega t - kx) \\ v_i = \frac{A}{Z_1} \cos(\omega t - kx) \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_r = B \cos(\omega t + kx + \varphi) \\ v_r = -\frac{B}{Z_1} \cos(\omega t + kx + \varphi) \end{cases}$$



Le mur très dur impose : $\forall t, v(0, t) = 0$

$$v_i(0, t) + v_r(0, t) = 0$$

$$A \cos(\omega t) - B \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\varphi = 0 \text{ et } B = A$$

donc $x \rightarrow 1$

+ formule trigo

$$p = p_i + p_r = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

$$v = v_i + v_r = -\frac{2A}{Z_1} \sin(\omega t) \sin(kx)$$

On a des OS. Les noeuds de vitesse coïncident avec les ventres de pression et inversement.

* $Z_2 \ll Z_1$

le milieu 2 est très mou par rapport au milieu 1.

$$R \rightarrow 1$$

$$T \rightarrow 0$$

$$x \rightarrow -1$$

$$\bar{\sigma} \rightarrow 0$$

A nouveau, l'intensité est totalement réfléchiée, retirons directement ces résultats.

$$p = 2A \cos(\omega t) \cos(kx)$$

$$CB: \forall t, p(0, t) = 0$$

$$p_i(0,t) + p_r(0,t) = 0$$

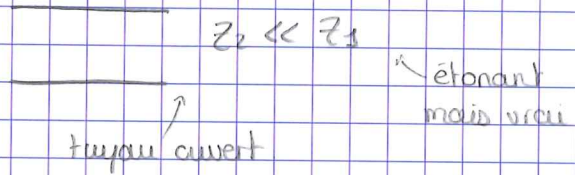
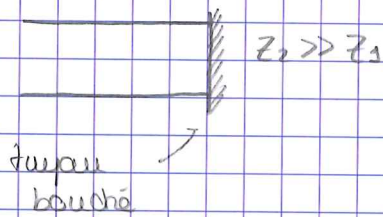
$$A \cos(\omega t) + B \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\varphi = 0 \quad B = -A$$

donc $z = 1$

On obtient à nouveau des OS par superposition mais la paroi est maintenant un noeud de pression et un ventre de vitesse.

On utilise parfois ces 2 cas pour décrire les tuyaux.



5. Modes propres et résonance d'un tuyau sonore. (interprétation naïve).

cf. Figure 3

fréquences propres :

cas FF et OO : $L = \frac{nc}{2f} \quad f_n = \frac{nc}{2L}$

cas FO et OF : $f_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{c}{2L}$

Une théorie complète devrait décrire l'excitation du vibreur à une extrémité et l'impédance de l'autre extrémité.