

Ondes électromagnétiques dans le vide

1.

A cause des termes en $\frac{\partial}{\partial t}$ dans les équations de Maxwell, des variations de E sont associées à la vibration d'un champ magnétique et réciproquement. Les champs se propagent de proche en proche un peu comme dans une chaîne de ressort.

I - Description des OEP dans le vide

1. Equation de d'Alembert et célérité des OEP.

Dans le vide ou l'air, hors des antennes on a :

$$\text{MF} : \text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{MA} : \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{MG} : \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{MØ} : \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\text{rot (MF)} : \text{rot}(\text{rot } \vec{E}) = -\text{rot}\left(\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}(\text{rot } \underline{\quad}) &= \\ \text{grad}(\text{div } \underline{\quad}) - \Delta \underline{\quad} \end{aligned}$$

$$\text{grad}(\text{div } \vec{E}) - \Delta \vec{E} = -\frac{\partial (\text{rot } \vec{B})}{\partial t}$$

$$\text{or } \text{div } \vec{E} = 0 \text{ et } \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{Donc } -\Delta \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

De même avec rot (MA) on trouve :

$$\Delta \vec{B} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\text{on identifie : } \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide.

la lumière est une OEP, l'optique est une branche particulière de l'électromagnétisme.

Par définition: $c = 299792458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Chaque composante cartésienne de $\vec{E}$ ou $\vec{B}$ vérifie une équation de d'Alembert.

$$\text{ex: } \Delta E_x - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = 0$$

2. Structure des OEP PPH (calcul dans C)

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0x}) \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \end{cases} \quad \text{avec } \omega = ck$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\underline{\vec{E}})$$

$$\underline{\vec{E}} = \begin{cases} E_{0x} e^{j\varphi_{0x}} e^{j(kx - \omega t)} \\ E_{0y} e^{j\varphi_{0y}} e^{j(kx - \omega t)} \\ E_{0z} e^{j\varphi_{0z}} e^{j(kx - \omega t)} \end{cases}$$

$$\underline{\vec{E}} = \underline{\vec{E}_0} e^{j(kx - \omega t)}$$

masque 6 constantes

De même, $\vec{B} = \text{Re}(\underline{\vec{B}})$

$$\underline{\vec{B}} = \underline{\vec{B}_0} e^{j(kx - \omega t)}$$

Dans le cas général, on écrira: $e^{j(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)}$ avec $\vec{k} = k \vec{u}$

$$\bullet \text{ RG: } \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$$

$$j\vec{k} \cdot \underline{\vec{E}} = 0$$

parce qu'il n'y a que l'exp. à dériver

$$jk\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

$$\text{donc } \vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

} partie réelle

$\vec{E}$ est inclus dans le plan d'onde ($\perp$ à la direction de propagation $\vec{u}$)

• $\nabla \cdot \vec{B} = 0$: idem pour $\vec{B}$

$\vec{B}$ est inclus dans le plan d'onde ($\perp$ à la direction de propagation $\vec{u}$)

Les OEP PPH dans le vide sont transverses pour $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

$$\text{• M.F. } \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

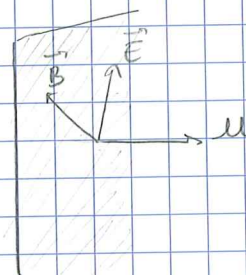
$$\nabla \wedge \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$jk\vec{u} \wedge \vec{E} = - (-j\omega \vec{B})$$

$$\vec{B} = \frac{jk\vec{u} \wedge \vec{E}}{\omega} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$

} Re

$$\vec{B} = \frac{\vec{u} \wedge \vec{E}}{c}$$



valable aussi pour une OEP PP par décomposition de Fourier et linéarité.

scatologie de structure des OEP PPH dans le vide

$$\text{• P.A. : } \vec{E} = c \vec{B} \wedge \vec{u} \quad \text{scatologie avec l'équation précédente.}$$

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{E}$, $\vec{B}$ forment un trièdre orthogonal direct.

cf. Figure 1.

3. Structure des OEP PPH (calcul dans $\mathbb{R}$)

$$\vec{E} = \begin{cases} E_{0x} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0x}) & = E_{0x} \\ E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) & = E_{0y} \\ E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) & = E_{0z} \end{cases}$$

* $\nabla \cdot \vec{E} = 0$

$$\text{div } \vec{E} = 0$$

$$E_{0x} k \sin(kx - \omega t + \varphi_{0x}) + 0 + 0 = 0$$

$$E_{0x} = 0$$

(transverse pour $\vec{E}$)

idem pour $\vec{B}$

* $\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

* $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cancel{\frac{\partial E_z}{\partial y}} - \cancel{\frac{\partial E_y}{\partial z}} \\ -\frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} \end{pmatrix} \quad \text{car } E \text{ ne dépend que de } x$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ k E_{0z} \sin(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \\ -k E_{0y} \sin(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

donc pour $\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -k E_{0z} \sin(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \\ +k E_{0y} \sin(kx - \omega t + \varphi_{0z}) \end{pmatrix}$$

en intégrant:

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} \cancel{C_1 k E_{0x}} \\ -\frac{k}{\omega} E_{0z} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0z}) + \cancel{C_2 k E_{0y}} \\ \frac{k}{\omega} E_{0y} \cos(kx - \omega t + \varphi_{0y}) + \cancel{C_3 k E_{0z}} \end{pmatrix}$$

on s'intéresse aux ondes et pas aux champs constants

$$\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{E_z}{c} \\ \frac{E_y}{c} \end{pmatrix} = \frac{\mu_0}{c} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{c} \wedge \vec{E}$$

4. Spectre et nomenclature des ondes hertziennes. (H. Hertz, Karlsruhe, 1886)

cf. Figure 2

II- Aspect énergétique

1. Cas d'une OEH PP

$$\bullet \mu_e = \epsilon_0 \frac{E^2}{2}$$

$$\bullet \mu_m = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$\text{avec } |\vec{B}| = \frac{|\vec{E}|}{c} \quad (\text{OPP})$$

$$\mu_m = \frac{E^2}{c^2 2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 E^2}{2}$$

$$\mu_m = \mu_e$$

$$\mu_{em} = 2\mu_e$$

$$\begin{aligned} \bullet \vec{R} &= \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{|\vec{E}| \times |\vec{E}|/c}{\mu_0} \vec{u} \\ &= \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u} \\ &= \epsilon_0 c E^2 \vec{u} \\ &= c \times 2\mu_e \vec{u} \end{aligned}$$

(trièdre direct main droite)

$$\frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

$$\text{donc } \vec{R} = \mu_{em} c \vec{u}$$

Par analogie avec $\vec{j} = \rho \vec{v}$ on voit que l'énergie est transportée à la vitesse $c\vec{u}$.

$\vec{R}$ est perpendiculaire aux plans d'ondes ce qui fait le lien avec le théorème de Poynting de l'optique.

2. Intensité d'une OEF PP.

$$I = \langle R \rangle \text{ (utilisée en optique)}$$

Considérons une OEF PPH,

$$R = c \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 c (E_{0y}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_{0y}) + E_{0z}^2 \cos^2(kx - \omega t + \phi_{0z}))$$

$$I = \epsilon_0 c \left(\frac{1}{2} E_{0y}^2 + \frac{1}{2} E_{0z}^2 \right)$$

3. Exemples de valeurs numériques.

On prend $E_{0z} = 0$ (polarisation xochlégne) ← et plus loin

$$E_{\text{eff}} = \frac{E_{0y}}{\sqrt{2}}$$

$$I = \epsilon_0 c E_{\text{eff}}^2$$

ex 1: laser $P = 1 \text{ mW}$

$$\text{diamètre } x = 2 \text{ mm}$$

$$I = \frac{P}{\pi x^2}$$

$$E_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{I}{\epsilon_0 c}} = 173 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$B_{\text{eff}} = \frac{E_{\text{eff}}}{c} = 6 \times 10^{-7} \text{ T}$$

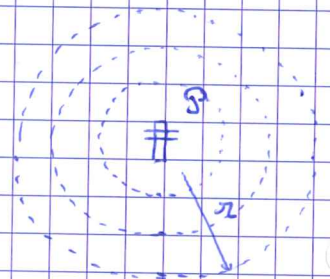
ex 2: antenne $P = 1 \text{ kW}$

On suppose l'émission isotrope ce qui est irréaliste

$$I = \frac{P}{4\pi x^2}$$

$$x = 1 \text{ km}$$

$$E_{\text{eff}} = 0,17 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$$



la norme sanitaire est de ne pas dépasser $E_{\text{eff}} = 41 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$

5. Energie et notation complexe.



$$A = \cos(\omega t)$$

$$B = \cos(\omega t + \phi)$$

$$AB \neq \text{Re}(A \underline{B})$$

Quand 2 grandeurs sinusoïdales sont exprimées en notation complexe, et qu'on veut calculer leur produit, il ne faut surtout pas multiplier les grandeurs complexes associées.

D'abord on revient en notation réelle !

exemple pour les calculs de $\vec{R}$, u_e , u_m , $p = \vec{j} \cdot \vec{E}$, $\vec{F} \cdot \vec{v}$, $\mathcal{P}_{\text{elect}} = U \dot{q}$

Pour obtenir la valeur moyenne de ces grandeurs

on peut calculer directement dans $\mathbb{C}$

Petit théorème :

4

Soient A, B deux grandeurs sinusoïdales de même pulsation.

$\underline{A}$ et $\underline{B}$ leurs grandeurs complexes.

Alors $\langle AB \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\underline{A} \underline{B}^*)$

démo : $A = A_0 \cos(\omega t + \varphi_A)$ $B = B_0 \cos(\omega t + \varphi_B)$
 $\underline{A} = A_0 e^{j(\omega t + \varphi_A)}$ $\underline{B} = B_0 e^{j(\omega t + \varphi_B)}$

$$AB = \frac{A_0 B_0}{2} [\cos(2\omega t + \varphi_A + \varphi_B) + \cos(\varphi_A - \varphi_B)]$$

$$\langle AB \rangle = \frac{A_0 B_0}{2} \cos(\varphi_A - \varphi_B)$$

$$\frac{1}{2} \underline{A} \underline{B}^* = \frac{A_0 B_0}{2} e^{j(\varphi_A - \varphi_B)}$$

$$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{2} \underline{A} \underline{B}^*\right) = \frac{A_0 B_0}{2} \cos(\varphi_A - \varphi_B) = \langle AB \rangle$$

Application :

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

OPPH : $\vec{B} = \frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}$ $\vec{u}$ s'écrit

$$\begin{aligned} \langle \vec{R} \rangle &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\frac{\vec{E}}{\mu_0} \wedge \left(\frac{\vec{u}}{c} \wedge \vec{E}^* \right) \right) \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} \operatorname{Re} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{u} - (\vec{E} \cdot \vec{u}) \vec{E}^* \right) \end{aligned}$$

$z \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\mu_0 c} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{u} \\ &= \frac{1}{2\mu_0 c} (E_x^2 + E_z^2) \vec{u} \end{aligned}$$

"on peut vivre sans
mais on vit mieux avec"

$$\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$$

formule du double produit
vectoriel

III - Polarisation des OEN PPT.

Rq : Harmonique est parfois remplacé par Panochromatique

$$\text{OEN PPH} = \text{OEN PPT}$$

1. Notion de polarisation

cf. Figure 3

cf. Définition

2. Polarisation rectiligne (PR)

Pour une PR, $P(t)$ se déplace sur un segment de droite

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t - kx_0 + \varphi_{0y}) \\ E_{0z} \cos(\omega t - kx_0 + \varphi_{0z}) \end{pmatrix} \quad \text{évalué en un point donné}$$

$$\omega t - kx_0 + \varphi_{0y} = \omega \left(t - \frac{k}{\omega} x_0 + \frac{\varphi_{0y}}{\omega} \right) = \omega \left(t - \frac{x_0}{c} + \frac{\varphi_{0y}}{\omega} \right)$$

$$t' = t - \frac{x_0}{c} + \frac{\varphi_{0y}}{\omega}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t') \\ E_{0z} \cos(\omega t' + \varphi_{0z} - \varphi_{0y}) \end{pmatrix}$$

But alléger les notations

$$\varphi = \varphi_{0z} - \varphi_{0y}$$

$$\text{donc } \vec{E} = \begin{pmatrix} 0 \\ E_{0y} \cos(\omega t') \\ E_{0z} \cos(\omega t' + \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ Y_p(t') \\ Z_p(t') \end{pmatrix}$$

sur la figure 3.

analogue à l'observation de deux tensions en mode XY

On obtient une PR si : cf. polarisations rectilignes

* $E_{0y} = 0$

ou

* $E_{0z} = 0$

ou

* $\varphi = 0$

ou

* $\varphi = \pi$

$$\rightarrow \text{pour } \varphi = 0 : \begin{cases} Y_p = E_{0y} \cos \omega t' \\ Z_p = E_{0z} \cos \omega t' \end{cases}$$

$$\vec{OP} = \cos \omega t' \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \end{pmatrix} = \cos \omega t' \times \vec{E}_0$$

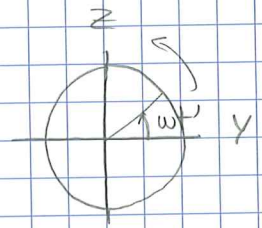
3. Polarisation circulaire (PC)

5

Pour une polarisation circulaire, $P(t)$ décrit un cercle

$$* E_{0y} = E_{0z} = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\vec{OP} \begin{pmatrix} E_0 \cos \omega t' \\ E_0 \sin \omega t' \end{pmatrix} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t' \\ \sin \omega t' \end{pmatrix}$$



$$* E_{0y} = E_{0z} = E_0 \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

$$\vec{OP} = E_0 \begin{pmatrix} \cos \omega t' \\ \sin(-\omega t') \end{pmatrix}$$

cf. polarisations circulaires

cf. Figure 4

4. Polarisation elliptique : cas le plus général

cf. polarisations elliptiques

Si φ est quelconque, on a une ellipse penchée.

Pour trouver le sens de rotation, on calcule le "vecteur vitesse" et on l'évalue au point $t'=0$.

$$\frac{d\vec{OP}}{dt} \begin{pmatrix} -\omega E_{0y} \sin(\omega t') \\ -\omega E_{0z} \sin(\omega t' + \varphi) \end{pmatrix}$$

$$\text{à } t'=0 \quad \frac{d\vec{OP}}{dt} \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega E_{0z} \sin(\varphi) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{OP}(0) \begin{pmatrix} E_{0y} \\ E_{0z} \cos \varphi \end{pmatrix}$$

autre méthode :

$$\vec{OP} \left(\omega t' = \frac{\pi}{2} \right) \begin{pmatrix} E_{0y} \times 0 \\ E_{0z} (-\sin \varphi) \end{pmatrix}$$

Selon le signe de $\sin \varphi$, à $\omega t' = \frac{\pi}{2}$, le point P se trouve en haut ou en bas sur l'axe vertical, on peut en déduire le sens de rotation.

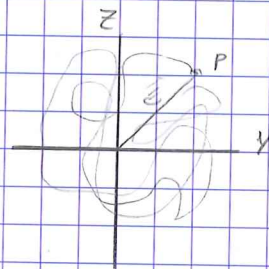
5. lumière naturelle

La lumière naturelle est une superposition d'une multitude d'ondulatoires de sorte que P se déplace aléatoirement dans le plan d'onde.

La lumière naturelle n'est pas polarisée.

Pour obtenir de la lumière polarisée

cf. TP.



6. Polarisation et notation complexe.

Pour voir la polarisation, revenir en notation réelle.

exemple:

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 e^{j(kx - \omega t)} \\ j E_0 \sqrt{2} e^{j(kx - \omega t)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(kx - \omega t) \\ -E_0 \sqrt{2} \sin(kx - \omega t) \end{pmatrix}$$

on choisit de se placer en $x=0$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} E_0 \cos(-\omega t) \\ -E_0 \sqrt{2} \sin(-\omega t) \end{pmatrix}$$

elliptique