

L'équation de d'Alembert décrit des ondes idéales, de manière simplifiée. Dans ce chapitre, nous allons voir de nouveaux effets.

I - Deux exemples de phénomènes ondulatoires

1. Ondes dans un câble coaxial

a) Hypothèses et modélisation

cf. Figure 1

cf. phénomène ondulatoire I.4.a.

Sur un petit morceau de longueur dx :

$$dC = \Gamma dx$$

$$dL = \Lambda dx$$

$$dR = r dx \quad \leftarrow \text{résistance du fil de cuivre.}$$

$$dG = g dx \quad \leftarrow \text{conductance de fuite du plastique.}$$

b) Mise en équations

$$u(x, t) = u(x + dx, t) + i(x, t) dR$$

$$+ dL \frac{di(x, t)}{dt}$$

$$u(x + dx, t) - u(x, t) = -i(x, t) dR - dL \frac{di(x, t)}{dt}$$

$$(U) \quad \frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} - r i$$

$$i(x, t) = dC \frac{\partial u(x + dx, t)}{\partial t} + dG u(x + dx, t) + i(x + dx, t)$$

$$(I) \quad \frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u$$

Élimination de i

$$(U) : \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial^2 i}{\partial x \partial t} - r \frac{\partial i}{\partial x}$$

$$(I) : \quad \frac{\partial^2 i}{\partial t \partial x} = -\Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - g \frac{\partial u}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \Lambda g \frac{\partial u}{\partial t} - \kappa \left(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} - g u \right)$$

$$(1) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - (\Lambda g + \kappa \Gamma) \frac{\partial u}{\partial t} - g \kappa u = 0$$

→ équations des

EDP plus compliquée que l'équation de d'Alembert.

télégraphistes

2. Chaîne de pendules couplés

a) Modélisation

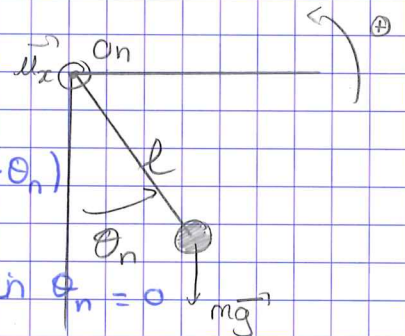
cf. Figure 2

les pendules oscillent dans des plans $(O_n, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ et sont reliés par des fils de torsion de constante C . ("couple de rappel" = $-C$, "angle de torsion")

TTC au pendule de rang n :

$$J \ddot{\Theta}_n = -mgl \sin \Theta + C(\Theta_{n+1} - \Theta_n) + C(\Theta_{n-1} - \Theta_n)$$

$$\ddot{\Theta}_n - \frac{C}{J} (\Theta_{n+1} + \Theta_{n-1} - 2\Theta_n) + \frac{mgl}{J} \sin \Theta_n = 0$$



passage à la limite continue : $\Theta_n(t) \rightarrow \Theta(x, t)$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{C}{J} a^2 \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} + \frac{mgl}{J} \Theta = 0$$

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{J}{Ca^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{mgl}{Ca^2} \Theta = 0$$

on pose $\frac{1}{c^2} = \frac{J}{Ca^2}$ donc $\frac{mgl}{Ca^2} = \frac{mgl}{J c^2} = \frac{\omega_p^2}{c^2}$ avec $\omega_p^2 = \frac{mgl}{J}$

$$(2) \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \Theta = 0$$

d'Alembert

pendule

Equation d'onde qui mélange d'Alembert et pendule simple qu'on pourrait raffiner avec des frottements visqueux.

II - Propagation d'une OPH dans un milieu linéaire

1. Linéarité.

Dans le I, u et θ sont solutions d'équations linéaires.
En physique, on parle de principe de superposition.
On peut combiner linéairement des solutions.

Ceci est fondamental pour la suite.

Contre-exemple dans I. 2), on garde $\sin \theta$ si les oscillations sont grandes.

2. Relation de dispersion

On cherche des solutions en OPHC (complexe).

$$\underline{f} = \underbrace{A}_{\in \mathbb{C}} e^{j(kx - \omega t)} \quad \text{avec } \omega \in \mathbb{R}^+ \text{ et } k \in \mathbb{C}$$

$$\hookrightarrow A = |A| e^{j\varphi}$$

On reporte dans les équations de I:

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial x} = jk A e^{j(kx - \omega t)} \quad \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial x^2} = (jk)^2 A e^{j(kx - \omega t)}$$

$$\frac{\partial \underline{f}}{\partial t} = -j\omega A e^{j(kx - \omega t)} \quad \frac{\partial^2 \underline{f}}{\partial t^2} = (j\omega)^2 A e^{j(kx - \omega t)}$$

$$(1) \quad (jk)^2 \underline{f} - \Lambda \Gamma (-j\omega)^2 \underline{f} - (\Lambda g + \alpha \Gamma) (-j\omega) \underline{f} - g \alpha \underline{f} = 0$$

$$-k^2 + \omega^2 \Gamma \Lambda + (\Lambda g + \alpha \Gamma) j\omega - g \alpha = 0$$

$$k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 + j\omega (\Lambda g + \alpha \Gamma) - g \alpha \quad (D_1)$$

L'OPPHC est solution ssi (D₁)

$$(2) \quad (jk)^2 \frac{f}{c^2} - \frac{1}{c^2} (-j\omega)^2 \frac{f}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \frac{f}{c^2} = 0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\omega_p^2}{c^2} \quad (D_2)$$

L'OPPHC est solution ssi' (D_2)

act: cf. Relation de dispersion (poly)

Rq: on a pas tiré k^2 .

3. Rôles de $k_1 = \text{Re}(k)$ et $k_2 = \text{Im}(k)$

$k = k_1 + jk_2$ en général, k solution de l'équation de dispersion n'est pas réel.

$$\begin{aligned} \frac{f}{k} &= |A| e^{j\varphi} e^{j((k_1 + jk_2)x - \omega t)} \\ &= |A| e^{j\varphi} e^{jk_1 x - k_2 x - j\omega t} \quad \left. \begin{array}{l} j^2 = -1 \end{array} \right\} \\ &= |A| e^{-k_2 x} e^{j(k_1 x - \omega t + \varphi)} \end{aligned}$$

$$f = \text{Re}(f) = |A| \underbrace{e^{-k_2 x}}_{\text{variation de l'amplitude}} \underbrace{\cos(k_1 x - \omega t + \varphi)}_{\text{propagation}}$$

* propagation:

$$k_1 x - \omega t + \varphi = k_1 \left(x - \frac{\omega}{k_1} t \right) + \varphi$$

On appelle vitesse de phase $v_p = \frac{\omega}{|k_1|}$

* variation d'amplitude:

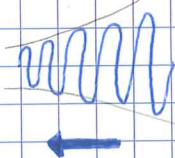
longueur caractéristique : $\frac{1}{|k_2|}$

En général $k_1 k_2 > 0$

• $k_1 > 0$ et $k_2 > 0$



$$k_1 < 0 \text{ et } k_2 < 0$$



3

L'onde s'affaiblit dans la direction où elle se propage.

L'amplification aurait lieu dans le cas $k_1 k_2 < 0$

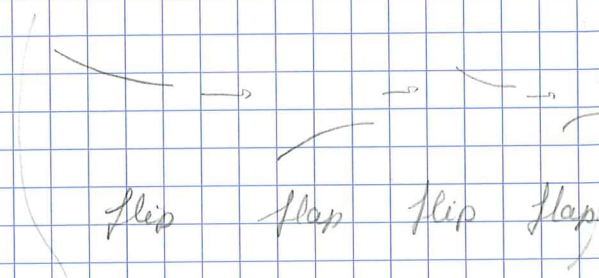
Cas particulier : $k_1 = 0$

$$k = j k_2 \in j\mathbb{R}$$

$$f = |A| e^{-k_2 z} \cos(\omega t - \varphi)$$

onde évanescente

Il n'y a plus de propagation



4. Longueur d'onde et dispersion

Pour d'Alembert : $\lambda = cT$

Ici, c'est plus subtil : $\lambda = \frac{2\pi}{k_1} \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$

ici ; $\omega = v_p k_1$ donc $T = \frac{2\pi}{v_p k_1} \quad T = \frac{\lambda}{v_p}$ ou $\lambda = v_p T$

À la différence de D'Alembert, v_p dépend de ω et λ n'est pas proportionnel à T .

Définition : lorsque v_p dépend de ω , il y a dispersion, la propagation est dite dispersive.

En optique, on pose $v_p = \frac{c}{n}$. Le milieu est dispersif signifie n dépend de ω donc de λ . (un verre dispersif (prisme) sépare les couleurs).

5. Retour aux exemples

a) Câble coaxial

$$k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 + (\pi \Gamma + g \Lambda) i \omega - \pi g$$

$$k_1 = k_1 + j k_2 \quad \text{à trouver}$$

On mène un calcul approximatif sous l'hypothèse que π et g sont « assez petits ».

$$\varepsilon = \frac{\pi}{\Lambda \omega} \ll 1$$

$$\varepsilon' = \frac{g}{\Gamma \omega} \ll 1$$

$$k^2 = \Lambda \Gamma \omega^2 \left(1 + i \underbrace{\left(\frac{\pi}{\Lambda \omega} + \frac{g}{\Gamma \omega} \right)}_{\substack{\varepsilon \\ \varepsilon'}} - \underbrace{\frac{\pi}{\Lambda \omega} \frac{g}{\Gamma \omega}}_{\substack{\varepsilon \varepsilon' \\ \text{ordre 2}}} \right)$$

$$k \approx \sqrt{\Lambda \Gamma} \omega \left(1 + \frac{i}{2} \left(\frac{\pi}{\Lambda \omega} + \frac{g}{\Gamma \omega} \right) \right)$$

$$k = \underbrace{\pm \sqrt{\Lambda \Gamma} \omega}_{k_1} \pm \underbrace{\frac{i}{2} \left(\pi \sqrt{\frac{\Gamma}{\Lambda}} + g \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} \right)}_{k_2}$$

on met la racine puis DL mais on écrit direct DL car l'ordre c'est bon

- $k_2 \neq 0$: atténuation (à cause de l'effet Joule, l'onde est absorbée par le milieu).

$$\bullet \quad v_g = \frac{\omega}{k_1} = \frac{\omega}{\sqrt{\Lambda \Gamma} \omega} = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} \quad (\text{comme avec D'Alembert})$$

À première vue, v_g ne dépend pas de ω , la propagation semble non dispersive. En réalité Λ dépend de ω , il y a une légère dispersion.

b) Chaîne de pendules

4

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

• si $\omega > \omega_p$, $k^2 > 0$

$$k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2} \in \mathbb{R}$$

donc $k = k_1$; $k_2 = 0$

↳ pas d'atténuation

$$v_g = \frac{\omega}{|k_1|} = \frac{\omega c}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

la propagation est dispersive.

• si $\omega < \omega_p$, $k^2 < 0$ donc $k \in j\mathbb{R}$

$$k = \pm \frac{j}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

$k = \pm j k_2 \in j\mathbb{R} \Rightarrow$ onde évanescente

III - Propagation de paquets d'onde

1. Paquet d'onde (ou train d'onde)

Une OPH est un concept irréaliste car illimité dans le temps et l'espace :

Une onde réaliste ressemblerait plutôt à cf. Figure 3

pour t donné elle est bornée dans l'espace et pour x donné elle est limitée dans le temps. cf. Figure 4.

On parle de paquet d'onde ou de train d'onde.

2. Décomposition spectrale

Une fonction périodique s'écrit comme une somme de sinusoides (Fourier) cela s'étend aux fonctions non périodiques.

la décomposition fait intervenir toutes les fréquences réelles. (transformée de Fourier)

Ainsi toute onde peut être vue comme une superposition d'OPH.

* $\bar{a}$ t fixé: $t = t_0$

$$f(x, t_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(k) dk e^{ikx}$$

↳ spectre spatial

cf. Figure 3

le spectre présente une largeur Δk autour de k_0

On admet $\Delta x \Delta k \geq \frac{1}{2}$ souvent $\Delta x \Delta k \approx 1$

Si $\Delta x \rightarrow \infty$, $\Delta k \rightarrow 0$, seul k_0 intervient, c'est l'OPH

C'est une relation d'incertitude espace - longueur d'onde.

* $\bar{a}$ x fixé: $x = x_0$

$$f(x_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) d\omega e^{i\omega t}$$

↳ spectre temporel

cf. Figure 4

le spectre a une largeur $\Delta \omega$ autour de ω_0

On admet $\Delta t \Delta \omega \geq \frac{1}{2}$ souvent $\Delta t \Delta \omega \approx 1$

C'est une relation d'incertitude temps - fréquence.

3. Propagation par décomposition spectrale

Une onde quelconque étant une somme d'OPH, il suffit d'écrire sa décomposition, de faire se propager chaque OPH puis de les superposer.

↳ dans la suite on prend pour t fixé

$\sum_n$	$\rightarrow$	$\int$
serie de Fourier		transformée de Fourier
fonction périodique		fonction ϕ périodique
f multiples de f_0		toutes f réelle

$$A|_{t=0}$$

$$f(x, 0) = \int A(k) dk e^{ikx}$$

en faisant évoluer chaque terme, on aura :

$$\begin{aligned} f(x, t) &= \int A(k) dk e^{i(kx - \omega t)} && \text{cù } \omega \text{ dépend de } k \\ &= \int A(k) e^{ik(x - v_g t)} dk && \text{(dispersion)} \end{aligned}$$

On voit que chaque OPH qui constitue le paquet avance à sa vitesse v_g dépendant peut-être de k (donc de ω).

4. Vitesse de groupe

Paradoxalement, le paquet dans son ensemble n'avance pas à la vitesse $v_g(k_0)$.

a) Ce qu'il faut savoir

cf. encadré : vitesse de groupe.

L'enveloppe du paquet d'onde avance à la vitesse de groupe.

A cause de la dispersion, le paquet d'onde s'étale à mesure qu'il se propage.

b) Un exemple pour comprendre

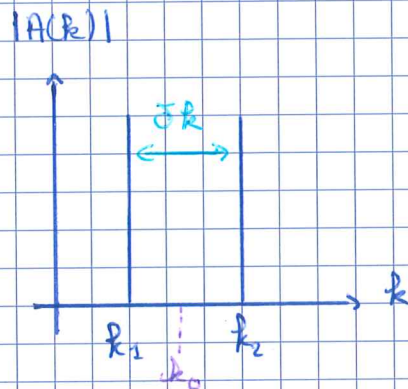
$$\begin{aligned} f(x, t) &= A \cos(k_1 x - \omega_1 t) + A \cos(k_2 x - \omega_2 t) \\ &= A \times 2 \cos\left(\frac{(k_1 + k_2)x - (\omega_1 + \omega_2)t}{2}\right) \\ &\quad \times \cos\left(\frac{(k_1 - k_2)x + (\omega_2 - \omega_1)t}{2}\right) \end{aligned}$$

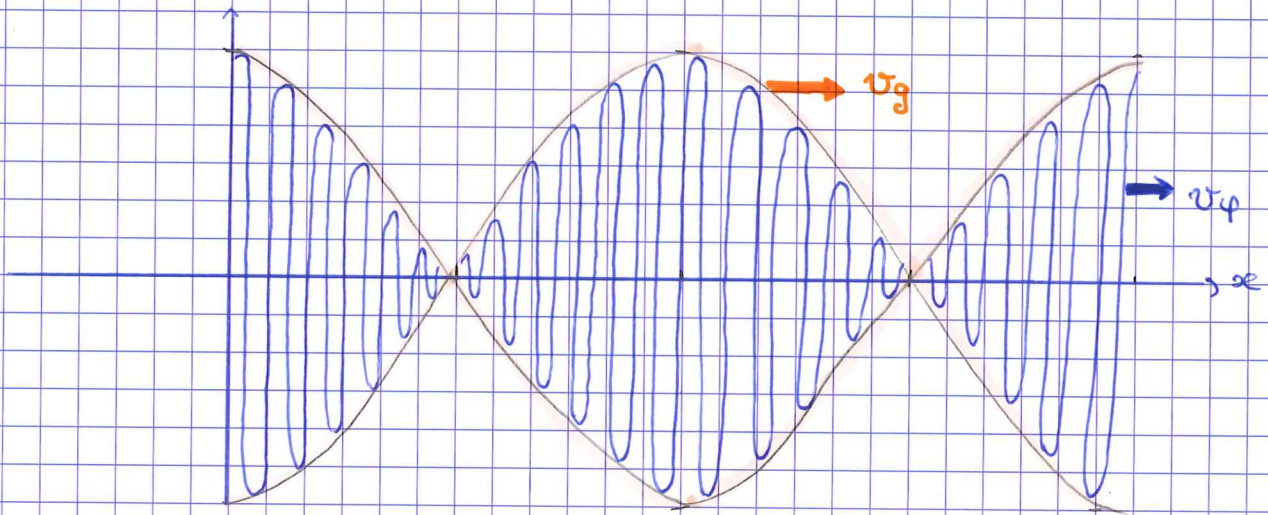
$$= 2A \cos(k_0 x - \omega_0 t) \cos\left(\frac{\delta k x - \delta \omega t}{2}\right)$$

$$\begin{array}{ll} \delta k \ll k_0 & \text{rapide} \\ \delta \omega \ll \omega_0 & \text{lente} \end{array}$$

$$\text{avance à } v_g = \frac{\omega_0}{k_0}$$

$$\text{avance à } v_g = \frac{\delta \omega}{\delta k}$$





c) on passe

d) Cas de la chaîne de pendule

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

Pour $\omega > \omega_p$

$$2k dk = \frac{1}{c^2} \times 2\omega d\omega$$

on calcule
la dérivée

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} = c \sqrt{\frac{1 - \omega_p^2}{\omega^2}} < c$$

cf. Figure 5