

Ondes électromagnétiques dans la matière conductrice

1.

Une OEF dans vide : facile mais dans la matière conductrice c'est plus délicat.

I- Propagation d'une OEF dans un conducteur ohmique.

1. Hypothèses et domaine de fréquences considéré.

e^- libre (dans un métal)

modèle de Drude : $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}$ (PFD)

RSF : $e^{-i\omega t}$

donc $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -m \frac{\vec{v}}{\tau} - e\vec{E}$

$$-i\omega m \vec{v} = -\frac{m}{\tau} \vec{v} - e\vec{E}$$

$$\vec{v} = \frac{-e\vec{E}}{m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)}$$

or $\vec{j} = n(-e)\vec{v}$

$$\vec{j} = \frac{ne^2}{m} \frac{\vec{E}}{\frac{1}{\tau} - i\omega}$$

$$\vec{j} = \underline{\underline{\sigma \vec{E}}}$$

avec $\underline{\underline{\sigma = \frac{ne^2}{m} \frac{1}{\frac{1}{\tau} - i\omega}}}$ conductivité complexe.

* si $\omega \ll \frac{1}{\tau}$:

$$\underline{\underline{\sigma \approx \frac{ne^2\tau}{m} = \sigma_{\text{usuel}}}}$$

valable si $f \ll \frac{1}{2\pi\tau}$

τ est de l'ordre de 10^{-14} s (cf électrostat)

$$\underline{\underline{f \ll 10^{13} \text{ Hz}}}$$

valable aux fréquences radio

* si $\omega \gg \frac{1}{\tau}$ ($f \gg 10^{13} \text{ Hz}$)

$\underline{\chi} = i \frac{n e^2}{m \omega} \in i\mathbb{R}$ (cf II)

Dans la suite de cette partie on s'intéresse au cas $\omega \ll \frac{1}{\tau}$

2. Neutralité

Par répulsion, un excès éventuel de charges se résorbe.

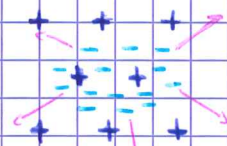
les e- bougent

$\vec{j} = \chi \vec{E}$

$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

$\text{div } \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

les charges créent un champ E



et les e- partent, il y en a moins

Donc $\text{div}(\chi \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\chi \text{div}(\vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\chi \frac{\rho}{\epsilon_0} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$

$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{\tau_{\text{relax}}} \rho = 0$

$\tau_{\text{relax}} = \frac{\epsilon_0}{\chi}$

$\rho(r, t) = \rho(r, 0) e^{-\frac{t}{\tau_{\text{relax}}}}$

dans le cuivre : $\chi \approx 6 \times 10^7 \text{ S}\cdot\text{m}^{-1}$

$\tau_{\text{relax}} \approx 10^{-13} \text{ s}$

$\Rightarrow$ Aux échelles de temps usuelles, on peut considérer $\rho = 0$.

Ce calcul est douteux, la loi d'Ohm ne s'applique pas à des échelles de temps aussi courtes. (mais pas grave)

3. Approximation du « bon conducteur »

RSF :

dans ΠA apparaissent :

$\vec{j} = \chi \vec{E}$

$\vec{j}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Soit E_0 ODG de $|\vec{E}|$

$$|\vec{j}| \sim \delta E_0$$

$$|\vec{j}_d| \sim \epsilon_0 \omega E_0 \quad \frac{\partial}{\partial t}$$

2.

$$|\vec{j}_d| \ll |\vec{j}| \quad \text{si} \quad \epsilon_0 \omega \ll \delta$$

$$\text{si} \quad \omega \ll \frac{\delta}{\epsilon_0}$$

$$\text{si} \quad \omega \ll \frac{1}{\tau_{\text{relax}}} \approx 10^{19} \text{ s}^{-1}$$

Dans le domaine de fréquences choisi $f < 10^{13} \text{ Hz}$ c'est largement vérifié.

Dans un métal, aux fréquences usuelles, on néglige le courant de déplacement $\vec{j}_d$. (comme ARQS magnétique)

4. Equation d'onde et relation de dispersion.

Equations de Maxwell avec $\rho = 0$ et $\vec{j}_d$ négligé.

$$\pi G \quad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\pi F \quad \text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\pi \emptyset \quad \text{div } \vec{B} = 0$$

$$\pi A \quad \text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} = \mu_0 \delta \vec{E}$$

$$\text{rot } (\pi F) : \quad \text{rot } (\text{rot } \vec{E}) = - \frac{\partial}{\partial t} (\text{rot } \vec{B}) \quad \left. \begin{array}{l} \pi A. \end{array} \right\}$$

$$\underbrace{\text{grad div } \vec{E} - \Delta \vec{E}}_{\text{O } \pi G} = - \frac{\partial}{\partial t} (\mu_0 \delta \vec{E})$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \delta \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$\vec{E}$ vérifie l'équation de la diffusion.

idem pour $\vec{B}$ à partir de $\text{rot } (\pi A)$

Cherchons des solutions de la forme $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{on} - \omega t)}$

$$\omega \in \mathbb{R} \quad \vec{k} = k \vec{u}_x \quad k \in \mathbb{C}$$

(OPPH C)

en reportant :

$$-k^2 \vec{E} - \mu_0 \times (-i\omega) \vec{E} = 0$$

$$k^2 = \mu_0 \times i\omega$$

$$k = \pm \sqrt{\mu_0 \times \omega} \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \times \omega}}$$

épaisseur de peau

$$k = \pm \frac{1+i}{\delta}$$

Rq:

$$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

a pour racine

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$$

Pour ce phénomène diffusif, on peut introduire $D = \frac{1}{\mu_0 \times}$
La loi d'échelle habituelle donne $\delta \approx \sqrt{DT}$

$$\delta \approx \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \times \omega}}$$

5 Interprétation : effet de peau.

$$k = \frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \quad (= k_1 + i k_2)$$

$$\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_y$$

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{u}_y e^{i \left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \right) x - \omega t \right)} \\ &= E_0 \vec{u}_y e^{-\frac{x}{\delta}} e^{-i \left(\frac{x}{\delta} - \omega t \right)} \end{aligned}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{on} = k x$$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E}') = E_0 \vec{u}_y e^{-\frac{x}{\delta}} \cos \left(\omega t - \frac{x}{\delta} \right)$$

atténuation
sur la longueur
caractéristique δ

propagation
à la vitesse
de phase

$$v_p = \omega \delta$$

période
spatiale
du cos

AN: cuivre 50 Hz $\delta = 1 \text{ cm}$

50 kHz $\delta = 10 \mu\text{m}$

$$\lambda = 2\pi \delta$$

Les OEN pénètrent peu dans les métaux. D'autre part le même effet
se produit pour les courants alternatifs, ils se concentrent à la surface du
conducteur.
 $\Rightarrow$ effet de peau

Ce comportement est lié à l'équation de la diffusion, on le retrouve en thermique avec l'effet de peau.

3

cf. Figure 1.

6. Aspect énergétique.

Puissance perdue par le champ au profit de la matière.

$$p = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2 \quad (\text{effet joule})$$

$$\langle p \rangle = \gamma E_0^2 \frac{1}{2} e^{-2x/\delta}$$

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

calculons $\vec{B}$: par PF

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= \vec{\nabla} \wedge \vec{E} \\ \text{rot } \vec{E} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ E \\ 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \text{sans la flèche donc on enlève le } u_y \\ &= \frac{\partial E}{\partial x} \vec{u}_z \\ &= E_0 i \left(\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \right) e^{i \left(\left(\frac{1}{\delta} + \frac{i}{\delta} \right) x - \omega t \right)} \vec{u}_z \end{aligned}$$

Rq: on peut aussi remplacer $\vec{\nabla}$ par $i\vec{k}$

$$\text{rot } \vec{E} = i\vec{k} \wedge \vec{E} = i \left(\frac{1+i}{\delta} \right) \vec{u}_x \wedge \vec{E}$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{rot } \vec{E} = -\frac{E_0}{\delta} \vec{u}_z (i-1) e^{\frac{-x}{\delta}} e^{i \left(\frac{x}{\delta} - \omega t \right)}$$

$$\vec{B} = \frac{E_0}{\delta \omega} (1-i) e^{\frac{-x}{\delta}} \vec{u}_z = \frac{E_0}{\delta \omega} (1-i) e^{\frac{-x}{\delta}} \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B}) = \frac{E_0}{\delta \omega} e^{\frac{-x}{\delta}} (\cos \varphi - \sin \varphi) \vec{u}_z \quad \varphi = \frac{x}{\delta} - \omega t$$

Contrairement au cas du $\vec{E}$ et $\vec{B}$ ne sont pas en phase vide

Revenons à $\vec{R}$:

intensité $\rightarrow \langle \vec{R} \rangle = \frac{E_0^2}{\delta \omega} e^{\frac{-2x}{\delta}} \times \frac{1}{2\mu_0} \vec{u}_z$

L'intensité s'affaiblit avec x car l'onde cède son énergie au métal.

$$\left(\frac{d\langle R \rangle}{dt} = -\langle r \rangle \right) \text{ à vérifier : ça s'affaiblit parce que ça coûte de l'énergie}$$

II- Propagation d'une OEP dans un plasma dilué et froid

1. Hypothèses d'étude.

Un plasma est un gaz ionisé, en général formé d'électrons, de cations et de quelques anions. Il est globalement neutre.

n : nb d' e^- / unité de volume.

ex: • ionosphère: $n \approx 10^{11} \text{ m}^{-3}$

Cette densité est très faible ($\approx 10^{-15} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$) d'où l'adj. dilué

• éclair

Hypothèse:

* on néglige les collisions grâce au caractère dilué

* non relativiste: $v \ll c$

* plasma froid: $\underbrace{\sqrt{\frac{3k_B T}{m}}}_{\text{agitation thermique}} \ll v$

↳ tous les e^- d'un domaine mésoscopique ont donc la même vitesse.

* les ions très lourds (par rapport aux e^-) ne bougent presque pas.

* $B \approx \frac{E}{c}$ en OdG

2. Conductivité complexe du plasma.

L' e^- n'est soumis qu'à $\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

$$\|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \leq \|\vec{v}\| \|\vec{B}\| \approx v \frac{E}{c} \quad \text{or} \quad \frac{v}{c} \ll 1$$

$$\text{donc } \|\vec{v} \wedge \vec{B}\| \ll E$$

On néglige la force magnétique.

$$\text{PFD à un } e^-: m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$$

$$\text{RSF : } m(-i\omega)\vec{v} = -e\vec{E}$$

$$\vec{v} = \frac{e}{im\omega}\vec{E}$$

$$\text{or } \vec{j} = n(-e)\vec{v} \quad \text{donc } \vec{j} = \frac{-ne^2}{im\omega}\vec{E}$$

$$\vec{j} = \chi \vec{E} \quad \text{avec } \chi = \frac{-ne^2}{im\omega} \in i\mathbb{R}$$

$\vec{j}$ et $\vec{E}$ sont en quadrature
(écart de $\frac{\pi}{2}$ dans l'argument)

3. Echanges Énergétiques entre le champ et la matière

$$\eta = \vec{j} \cdot \vec{E}$$

$$\langle \eta \rangle = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{j} \cdot \vec{E}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \text{Re}(\chi \vec{E} \cdot \vec{E}^*)$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\vec{E} \cdot \vec{E}^*}_{\in \mathbb{R}} \text{Re}(\chi)$$

$$= 0$$

$$\chi \in i\mathbb{R}$$

cf. Figure 2 Le produit de 2 grandeurs en quadrature est tantôt positif, tantôt négatif de valeur moyenne nulle.

4. Neutralité du plasma et transversalité de l'OEN PPH.

$$\text{RSF} \quad \text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \vec{j} = \chi \vec{E} \quad \text{div}(\vec{j}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\text{div}(\chi \vec{E}) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\chi \text{div } \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\chi}{\epsilon_0} \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\chi}{\epsilon_0} \rho - i\omega \rho = 0$$

$$\left(\frac{\chi}{\epsilon_0} - i\omega\right) \rho = 0$$

$$* \quad \frac{\chi}{\epsilon_0} - i\omega = 0 \Leftrightarrow \chi = i\omega\epsilon_0 \Leftrightarrow \frac{-ne^2}{m\omega} = i\omega\epsilon_0 \Leftrightarrow \omega = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

$$\text{On pose } \omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$$

pulsation de plasma

(pulsation propre d'un plasma)

dans la ionosphère : $f_p = 3 \text{ MHz}$

si $f \neq f_p$, $\left(\frac{\epsilon}{\epsilon_0} - 1 \right) \neq 0$ donc $\underline{E} = 0$

C'est le cas étudié dans la suite.

Alors PG s'écrit : $\text{div } \underline{E} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \text{grad } \underline{E} \cdot \underline{E} &= 0 \\ \underline{E} \cdot \underline{E} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Re}$$

donc $\underline{E} \perp \underline{u}$

↳ onde transverse

5. Equation d'onde et relation de dispersion.

$$\text{PF } \text{rot } \underline{E} = - \frac{\partial \underline{B}}{\partial t}$$

$$\text{rot (PF)} : \underbrace{\text{grad}(\text{div } \underline{E}) - \Delta \underline{E}}_{0(\text{ne})} = - \frac{\partial (\text{rot } \underline{B})}{\partial t}$$

$$\Delta \underline{E} - \frac{\partial (\text{rot } \underline{B})}{\partial t} = \underline{0}$$

$$\Delta \underline{E} - \frac{\partial (\mu_0 (\underline{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \underline{E}}{\partial t}))}{\partial t} = \underline{0}$$

$$\Delta \underline{E} - \mu_0 \frac{\partial \underline{j}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$$

pour éliminer $\underline{j}$
on passe en $\mathbb{C}$

$$\underline{j} = \gamma \underline{E}$$

$$\Delta \underline{E} - \mu_0 \gamma \frac{\partial \underline{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$$

solutions en OPPHC : $\underline{E} = \underline{E}_0 e^{i(kx - \omega t)}$

$\omega \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{C}$

$$-k^2 \underline{E} - \mu_0 \frac{i n e^2}{m \omega} (-i \omega) \underline{E} - \frac{1}{c^2} (-\omega^2) \underline{E} = \underline{0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n e^2 \mu_0}{m} \quad \left. \vphantom{k^2} \right\} \frac{1}{c^2} = \mu_0 \epsilon_0$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n e^2}{m \epsilon_0 c^2} \quad \left. \vphantom{k^2} \right\} \omega_p^2 = \frac{n e^2}{m \epsilon_0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2}$$

relation de dispersion

6. Cas où $\omega > \omega_p$

5.

$$k = \left(\pm \right) \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

selon le sens de propagation

Dans la suite, on s'intéresse à $\vec{k} = k \vec{u}_x$ $k > 0$

Prenons $\vec{E}_0 = E_0 \vec{u}_y$

$$\vec{E} = \text{Re}(\vec{E})$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y \cos(kx - \omega t)$$

L'onde se propage sans atténuation avec $v_p = \frac{\omega}{k} = \frac{c\omega}{\sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}}$

v_p dépend de ω , la propagation est dispersive.

$$v_p = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

Calcul de $\vec{B}$ (MF)

$$\vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{u}_x \frac{\partial}{\partial x} \wedge E \vec{u}_y$$

$$= \frac{\partial E}{\partial x} \vec{u}_z$$

$$= -k E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}} \vec{E} = k E_0 \sin(kx - \omega t) \vec{u}_z$$

$$\vec{B} = \frac{k E_0 \cos(kx - \omega t)}{\omega} \vec{u}_z = \frac{E}{\omega} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y$$

$$\vec{B} = \frac{\vec{u}_x}{v_p} \wedge \vec{E}$$

On pourrait calculer $\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$ puis définir une vitesse d'énergie $\vec{v}_e$

par $\vec{R} = \mu_0 \vec{v}_e$

$\mu_0 + \epsilon_0$ dû à l'agitation des e- dans le plasma

$\Rightarrow$ pour le calcul eff. cours
Valentin cahier de prépa

Un calcul mq $\vec{v}_e = \vec{v}_g$ vitesse de groupe

calcul de v_g

différentielle de la relation de dispersion:

$$2k dk = \frac{1}{c^2} 2\omega d\omega$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c^2 k}{\omega} = \frac{c^2}{v_p} = \frac{c}{\sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}$$

cf. Figure 3

cf. Figure 4

4. Cas où $\omega < \omega_p$ a) Caractère évanescent

$$k^2 < 0 \text{ donc } k \in i\mathbb{R} \quad k = \pm \frac{1}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2}$$

dépend du sens de propagation

on s'intéresse à $k = \frac{i}{c} \sqrt{\omega_p^2 - \omega^2} = i k''$ ← le k'' du chapitre la dispersion

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_0 \vec{u}_y e^{i(kx - \omega t)} \\ &= E_0 \vec{u}_y e^{i(i k'' x - \omega t)} \\ &= E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x} e^{-i\omega t} \end{aligned}$$

$$\vec{E} = E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x} \cos(\omega t) \quad \text{onde évanescente.}$$

b) Expression de $\vec{B}$

parce qu'il n'y a que l'exp. à dériver

$$\begin{aligned} \text{(MF)} \quad \text{rot } \vec{E} &= (ik \vec{u}_x \wedge \vec{E}) \\ &= ik E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x - i\omega t} \end{aligned}$$

$$-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}$$

$$\begin{aligned} i\omega \vec{B} &= ik E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x - i\omega t} \\ \vec{B} &= \frac{k}{\omega} E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x - i\omega t} \\ &= \frac{ik''}{\omega} E_0 \vec{u}_y e^{-k'' x - i\omega t} \end{aligned}$$

$$\triangle k \in i\mathbb{R}$$

$$\vec{B} = \text{Re}(\vec{B})$$

$$\vec{B} = E_0 \frac{k''}{\omega} \vec{u}_y e^{-k''z} \sin(\omega t)$$

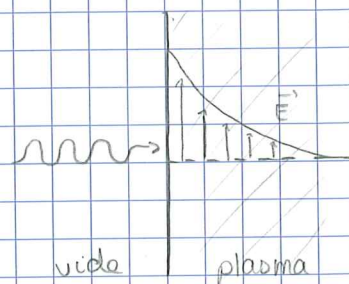
$\vec{E}$ et $\vec{B}$ sont en quadrature (très différent du vide)

c) Transport de l'énergie

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E_0^2 k''}{\omega \mu_0} e^{-2k''z} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \vec{u}_z$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \vec{0} \quad \leftarrow \text{car } \langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0$$

Il n'y a en moyenne pas de transport d'énergie.



III - Généralisation, indice optique

1. Equation d'onde

Hypo: milieu conducteur, $\rho = 0$, $\vec{j} = \sigma \vec{E}$

$$(\nabla \cdot \vec{E}) = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = - \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{B})}{\partial t}$$

$$\underbrace{\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E})}_{=0} = - \frac{\partial (\mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}))}{\partial t}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$$

2. Relation de dispersion

$$-k^2 \vec{E} - \mu_0 \sigma (-i\omega) \vec{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \vec{E} = \vec{0}$$

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} + \mu_0 \sigma i\omega$$

Dans le cas général, on en déduit :

$$\underline{k} = k'(\omega) + i k''(\omega)$$

3. Interprétation : vitesse de phase et indice complexe

Définition : indice complexe $\underline{n}(\omega)$: $\underline{k} = \underline{n} \frac{\omega}{c}$

$$\underline{n} = n' + i n''$$

$$\text{d'où } k' = n' \frac{\omega}{c} \quad k'' = n'' \frac{\omega}{c}$$

* n' : indice de réfraction

$$v_g = \frac{\omega}{k'} = \frac{\omega}{n' \frac{\omega}{c}} : v_g = \frac{c}{n'}$$

Dans un milieu dispersif, v_g et n' dépendent de la longueur d'onde donc de ω (un prisme sépare les couleurs).

* n'' : indice d'extinction

$$\begin{aligned} \underline{E} &= E_0 \vec{u}_y e^{i \left((n' + i n'') \frac{\omega}{c} x - \omega t \right)} \\ &= E_0 \vec{u}_y e^{-\frac{n'' \omega x}{c}} e^{i \left(n' \frac{\omega}{c} x - \omega t \right)} \end{aligned}$$

$$\underline{E} = E_0 \vec{u}_y e^{\text{extinction}} e^{i \underbrace{\left(n' \frac{\omega}{c} x - \omega t \right)}_{v_g = \frac{c}{n'}}}$$

Rq :

milieu transparent
on néglige n''

4. Cas d'un isolant DLHI

Dans un isolant, les porteurs de charges (principalement e^-) peuvent vibrer autour de chaque atome, molécule : polarisation des molécules.

On peut les voir comme de minuscules courants localisés ($\vec{j}_{\text{pol}}$: courants de polarisation)

La différence avec les conducteurs n'est pas si grande.

Dans les diélectriques (isolants), on n'emploie pas σ mais $\underline{\epsilon}_r(\omega)$.

L'équation d'onde s'écrit : $\Delta \underline{E} - \mu_0 \epsilon_0 \underline{\epsilon}_r(\omega) \frac{\partial^2 \underline{E}}{\partial t^2} = \underline{0}$

$$-k^2 \underline{\underline{E}} - \frac{1}{c^2} \underline{\underline{\epsilon}} \omega^2 \underline{\underline{E}} = \underline{\underline{0}}$$

7.

$$k^2 = \underline{\underline{\epsilon}} \frac{\omega^2}{c^2}$$

on identifie $\underline{n}^2 = \underline{\underline{\epsilon}}$ c'est le cas dans les

DLHI : diélectrique linéaire homogène isotrope.

milieu transparent : $\underline{\underline{\epsilon}} \in \mathbb{R}^+$ $\underline{n} = n' = \sqrt{\underline{\epsilon}}$

5. Aspect énergétique

* calcul dans $\mathbb{R}$

A faire

* calcul dans $\mathbb{C}$

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{E}}_0 e^{i(kx - \omega t)}$$

avec $k = k' + ik''$

$$\text{rot } \underline{\underline{E}} = i\vec{k} \wedge \underline{\underline{E}}$$

$$(PF) \quad \frac{\partial \underline{\underline{B}}}{\partial t} = -i\vec{k} \wedge \underline{\underline{E}}$$

$$\underline{\underline{B}} = \frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\underline{E}}$$

$$\langle R \rangle = \frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\underline{\underline{E}} \wedge \underline{\underline{B}}^*}{\mu_0} \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \text{Re} \left(\underline{\underline{E}} \wedge \left(\frac{\vec{k}}{\omega} \wedge \underline{\underline{E}}^* \right) \right)$$

$$\langle \vec{R} \rangle = \frac{1}{2\mu_0 \omega} \operatorname{Re} \left((\vec{E} \cdot \vec{E}^*) \vec{k}^* - (\vec{E} \cdot \vec{k}^*) \vec{E}^* \right)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \vec{E} \cdot \vec{E}^* \operatorname{Re}(\vec{k}^*)$$

$$\vec{k}^* \vec{u} \cdot \vec{E} = 0$$

car onde transverse

$$= \frac{1}{2\mu_0 \omega} \vec{E}_0 \cdot \vec{E}_0^* e^{-2k''x} \frac{1}{k'} \vec{u}$$

$$I = I(0) e^{-2k''x}$$

on retrouve la loi de Beer-Lambert. $\ln \frac{I(x)}{I(0)} = -2k''x = -[\gamma]_0 l C$