

On étudie la structure du faisceau sortant d'une cavité laser.

I - Description d'un faisceau laser

1. Une onde ni vraiment plane, ni vraiment sphérique

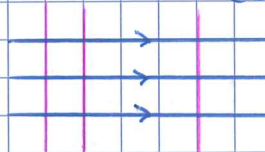
cf. Figure.

$w_0 \approx$ quelques mm

Le faisceau finit par diverger, $\theta \approx 1' = \frac{1}{60}^\circ$

- Pour une onde plane

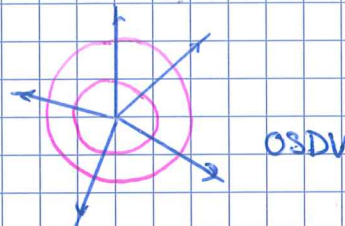
$$\underline{s} = s_0 e^{j(kz - \omega t)} \quad \forall x, y$$



Le faisceau n'est pas limité latéralement, alors que le LASER l'est !

- Pour une onde sphérique

$$\underline{s} = \frac{A}{r} e^{j(kr - \omega t)} \quad \forall \theta, \forall \varphi$$



Une OSDV n'est pas limitée angulairement.

Le laser est une situation hybride qui rappelle tantôt une onde plane limitée latéralement tantôt une onde sphérique limitée angulairement.

2. Limitation latérale et divergence angulaire

cf. Figure

Rappel : Une fente de largeur a diffracte une onde avec une ouverture θ de l'ordre de $\frac{\lambda}{a}$.

Par analogie, pour le laser, on s'attend à ce que $\theta \approx \frac{\lambda}{w_0}$.

En effet, l'onde est dans les 2 cas solution de l'équation de d'Alembert avec des conditions de bord similaires.

II - Structure d'un faisceau gaussien

1. Expression du scalaire optique

Un faisceau laser est Gaussien. La solution des équations de d'Alembert qui le décrit est :

$$\underline{s}(r) = s_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w(z)^2}} e^{i\varphi(r,z)} \quad \text{et} \quad \underline{s}(r,t) = \underline{s}(r) e^{-j\omega t}$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

formules
redonnées

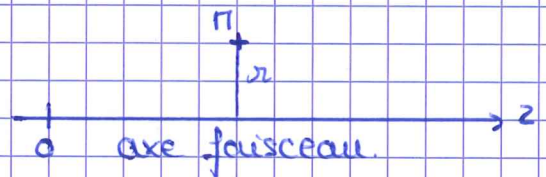
$$\varphi(r,z) = kz + \frac{k r^2}{2R(z)} - \arctan\left(\frac{z}{z_R}\right)$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2}\right)$$

w_0 : waist (largeur au col)

z_R : longueur de Rayleigh

φ : phase de Gouy



2. Rayon du faisceau

$$|s| = s_0 \frac{w_0}{w(z)} e^{-\frac{r^2}{w^2(z)}}$$

$$I = \frac{1}{2} |s|^2 = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{w_0^2}{w^2(z)} e^{-\frac{2r^2}{w^2(z)}}$$

à z fixé (plan $\perp$ faisceau), $|s|$ et I dépendent de r de façon gaussienne et décroissent lorsqu'on s'éloigne de l'axe,

cf. Figure 4

w est le rayon du faisceau, distance au-delà de laquelle la lumière est faible.

Sur l'axe, $r=0$ donc $I(0,z) = \frac{1}{2} s_0^2 \frac{w_0^2}{w(z)^2}$

$$I_{\max} = \frac{1}{2} s_0^2 \quad (\text{obtenu en } r=0 \text{ et } z=0)$$

intensité max
au col

• Puissance (z fixé)

2.

$$\begin{aligned}
 P &= \int I dS \\
 &= \int_0^\infty \frac{1}{2} s_0^2 \frac{\omega_0^2}{w(z)^2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}} 2\pi r dr \\
 &= \frac{1}{2} s_0^2 \omega_0^2 \pi \left[-\frac{1}{2} e^{-\frac{2r^2}{w^2}} \right]_0^\infty \\
 &= \frac{\pi}{4} s_0^2 \omega_0^2
 \end{aligned}$$

intégration selon θ

$$P = \frac{I_{\max}}{2} \pi \omega_0^2$$

P ne dépend pas de z , la puissance se conserve au long de la propagation.

Dans le cœur du faisceau ($r \leq w(z)$) :

$$\begin{aligned}
 P' &= \int_0^w I(r, z) 2\pi r dr \\
 &= \frac{1}{2} s_0^2 \omega_0^2 \pi \left(-\frac{1}{2} e^{-2} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{\pi}{4} s_0^2 \omega_0^2 (1 - e^{-2}) \\
 &= (1 - e^{-2}) P
 \end{aligned}$$

$$P' = 0,86 P$$

Dans le cœur du faisceau, il y a déjà 86% de la puissance.

3. Etude du rayon $w(z)$ et de la phase $\psi(z)$

* Le rayon w du faisceau varie avec z .

$$w: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$z \mapsto w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}$$

La fonction w est paire et croît sur $\mathbb{R}^+$

• $z=0$, $w(0) = w_0$, c'est le minimum.

• $|z| \ll z_R$, $w(z) \approx w_0$ $w(z) = w_0 + O\left(\left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)$

• $|z| \gg z_R$, $w(z) \approx w_0 \left| \frac{z}{z_R} \right|$

$$\omega(z) = \omega_0 \left| \frac{z}{z_R} \right| \sqrt{1 + \frac{z_R^2}{z^2}} \quad \text{"on factorise le truc énorme"}$$

$$= \omega_0 \left| \frac{z}{z_R} \right| \left(1 + \frac{1}{2} \frac{z_R^2}{z^2} \right) + O\left(\frac{z_R^2}{z^2}\right)$$

$$\omega(z) \approx \omega_0 \left| \frac{z}{z_R} \right| + \underbrace{\omega_0 \frac{1}{2} \left| \frac{z_R}{z} \right|}_{\rightarrow 0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{"si } z > 0, \quad z \gg z_R ; \quad \omega \approx \omega_0 \frac{z}{z_R} \\ \text{"si } z < 0, \quad |z| \gg z_R ; \quad \omega \approx -\omega_0 \frac{z}{z_R} \end{array} \right\} \text{donnent des asymptotes obliques}$$

cf. Figure 5 : montre bien les comportements limites (près du centre et à l'infini).

Quand un faisceau sort d'une boîte laser, on voit essentiellement la zone $z > 0$, où le faisceau s'élargit.

* Etude de $\psi : z \mapsto \psi(z)$ (pas vraiment au prog !)

$$\bullet |z| \ll z_R$$

$$\text{arctan} \frac{z}{z_R} \rightarrow 0$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \approx \frac{z_R^2}{z}$$

$$\frac{kz^2}{2R} \approx \frac{kz^2}{2z_R^2}$$

Dans le cœur du faisceau, $z \ll z_R$, $\omega \approx \omega_0$

$$\text{alors } \frac{kz^2}{2R} \leq \frac{k\omega_0^2 z}{2z_R^2} \quad \text{or } \omega_0^2 = \frac{2z_R}{\pi}$$

$$\frac{kz^2}{2R} \leq \frac{k}{2} \frac{\pi}{\pi} \frac{z}{z_R} = \frac{z}{z_R} \ll 1 \quad \left(k = \frac{2\pi}{\lambda} \right)$$

Rq : pour une phase ce qui est intéressant c'est de majorer certains termes par 2π .

Dans la région $|z| \ll z_R$: $\psi \approx kz$

$$\bullet |z| \gg z_R$$

$$\text{arctan} \frac{z}{z_R} \rightarrow \pm \frac{\pi}{2}$$

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right) \approx z$$

3

$$kz + \frac{kx^2}{2R} \approx k \left(z + \frac{x^2}{2z} \right)$$

$$\approx kz \left(1 + \frac{x^2}{2z^2} \right)$$

$$\approx kz \sqrt{1 + \frac{x^2}{z^2}}$$

$$\sqrt{z^2 - |z|^2} = \pm z$$

$$\approx \pm k \sqrt{z^2 + x^2}$$

$$\approx \pm k \text{On}$$

distance d'un pt P à l'origine

Dans la région $|z| \gg z_R$: $\Psi \approx + k\text{On} - \frac{\pi}{2}$ ou $\Psi \approx - k\text{On} + \frac{\pi}{2}$

4. Zone cylindrique et zone conique

• $|z| \ll z_R$

Le faisceau est confiné dans un cylindre de rayon w_0 :
on parle de zone cylindrique.

Comme $\Psi \approx kz$, l'onde est presque plane, les rayons lumineux sont parallèles à $\vec{u}_z$ mais elle est limitée latéralement.

On décrit ainsi un laser près de la sortie de la cavité.

• $|z| \gg z_R$

w est quasi linéaire en z , la lumière couvre un cône :
on parle de zone conique.

La phase est du type : $e^{i \left(\pm k\text{On} \mp \frac{\pi}{2} - \omega t \right)}$

ce qui correspond

à une OSDV ou OSCV

asymptote

$$w \approx w_0 \frac{z}{z_R}$$

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{w}{z} = \frac{w_0}{z_R}$$

$$\text{or } z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

$$\text{donc } \theta \approx \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

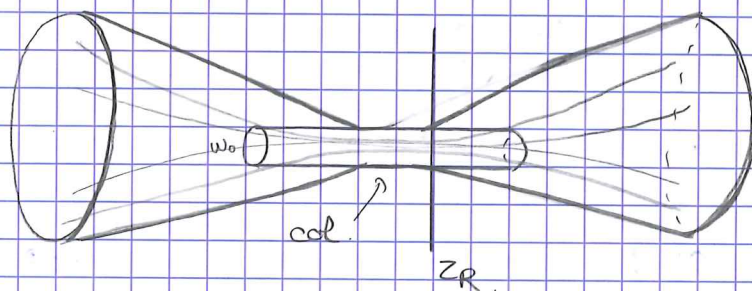
w_0 petit

symétrique de l'asymptote

Relation de type diffraction, plus le faisceau est étroit à son col, plus il diverge dans sa zone conique.

♥ cf. Conclusion importante

LASER
faisceau
lumineux



Les rayons se courbent le long du faisceau.

cf. OAG

III - Focalisation et collimation d'un faisceau gaussien

Une lentille modifie un faisceau gaussien.

Nous voyons deux cas simples.

1. Focalisation

a. Principe

Focalisation: action de faire converger un faisceau lumineux près d'un point.

On utilise un faisceau gaussien dans sa zone cylindrique car l'onde est quasi-plane, on place la lentille dans cette zone avec $f' \ll z_R$

cf. Figure 6.

↳ on attend une convergence vers le foyer, on obtient en réalité la partie conique convergente d'un faisceau gaussien avec son col en f' .

b. Caractéristiques du faisceau émergent.

$$\theta' \approx \frac{w_0}{f'}$$

$$w_0' = \frac{\lambda}{\pi \theta'} = \frac{\lambda}{\pi w_0 / f'}$$

$$w_0' = \frac{\lambda f'}{\pi w_0}$$

$$\theta' = \frac{\omega_0}{f'} = \frac{\lambda}{\pi \theta f'}$$

$$\left(\theta = \frac{\lambda}{\pi \omega_0} \right)$$

$$z_R' = \frac{\pi \omega_0'^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda f'}{\pi \omega_0} \right)^2 = \frac{\lambda f'^2}{\pi \omega_0^2} \quad \left(z_R = \frac{\pi \omega_0^2}{\lambda} \right)$$

$$z_R' = \frac{f'^2}{z_R}$$

Application : focaliser un faisceau pour le faire entrer dans une fibre optique, laser de chirurgie, découpe laser (ici la puissance est aussi importante).

c. Intensité au foyer

En négligeant les pertes et les réflexions, $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$

$$\text{donc} \quad \frac{\pi}{2} \omega_0'^2 I_{\max}' = \frac{\pi}{2} \omega_0^2 I_{\max}$$

$$I_{\max}' = I_{\max} \left(\frac{\omega_0}{\omega_0'} \right)^2$$

En réduisant la largeur de faisceau par 100, on multiplie l'intensité par 10000.

En pratique, on souhaite réduire f' mais on est limité : $f'_{\min} \approx \omega_0$

$$\text{donc} \quad \omega_0'_{\min} \approx \frac{\lambda}{\pi}$$

2. Collimation

a. Principe

Collimation : action de transformer un faisceau en un faisceau de rayons parallèles.

cf. Figure 7 inspiré par l'optique géométrique, on place le col d'un faisceau gaussien en F et on place la lentille dans la zone conique divergente. Pour cela $f' \gg z_R$

On attend après la lentille une onde plane. On obtient en réalité la partie cylindrique d'un nouveau faisceau gaussien.

b. Caractéristiques du faisceau émergent.

$$\theta \simeq \tan \theta = \frac{w_0'}{f'}$$

formules
Ø par ♥

$$\text{donc } w_0' = f' \theta = \frac{f' \lambda}{\pi w_0}$$

$$w_0' = \frac{f' \lambda}{\pi w_0}$$

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi w_0'} = \frac{1}{\pi f' \theta}$$

$$\theta' = \frac{1}{\pi f' \theta}$$

$$z_R' = \frac{\pi w_0'^2}{\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda f'}{\pi w_0} \right)^2 = \frac{f'^2 \lambda}{\pi w_0^2}$$

$$z_R' = \frac{f'^2}{z_R}$$

Mêmes formules que dans 1-b.

Ceci est lié au principe de retour inverse de la lumière.

AN: laser He-Ne $\theta = 1'$ $f' = 1\text{m}$
 $\lambda = 633\text{nm}$

on trouve $\theta' = 2'$

On souhaiterait réduire l'angle de divergence (θ): c'est noté !!

Ça marcherait mieux si θ était grand, d'où la suite.

La même remarque s'applique pour z_R .

3. Elargisseur de faisceau.

D'abord, on focalise le faisceau puis on le colimate.

8
(1.2)

a. Tracé de rayons lumineux.

cf. Figure 8 : système afocal comme une lunette de Galilée mais inversée par la longueur des focales.

$$\tan \alpha = \frac{F_1' H}{f_1'}$$

$$\tan \alpha' = -\frac{F_1' H}{f_2'}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'}$$

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_2'}{f_1'}$$

b. Etude en optique gaussienne

L_1 est dans les conditions du paragraphe 1 et L_2 dans celles du paragraphe 2. cf. Figure 9

Formules du paragraphe 1 :

$$w_0' = \frac{\lambda f_1'}{\pi w_0}$$

$$\theta' = \frac{\lambda}{\pi f_1'(\theta)}$$

$$z_R' = \frac{f_1'^2}{z_R}$$

Formules du paragraphe 2 : (mê que 1)

$$\theta'' = \frac{\lambda}{\pi f_2' \theta'} = \frac{\lambda}{\pi f_2'} \frac{\pi f_1' \theta}{\lambda}$$

$$\theta'' = \frac{f_1'}{f_2'} \theta$$

$$w_0'' = \frac{\lambda f_2'}{\pi w_0'}$$

$$w'' = \frac{f_2'}{f_1'} w_0$$

$$z_R'' = \frac{f_2'^2}{z_R'}$$

$$z_R'' = \frac{f_2'^2}{f_1'^2} z_R$$

On remarque l'analogie avec 3.a.

Pour bien collimater, on choisit $f_2' > f_1'$ donc $\theta'' < \theta$ et $z_R'' \gg z_R$.

$$w_0'' \gg w_0$$

En élargissant le faisceau, on le rend beaucoup moins divergent.

AN : ex : Terre - Lune

$$w_0'' = 77 \text{ cm} \quad \lambda = 532 \text{ nm} \quad \theta'' = 1 \times 10^{-5} \text{ degrés}$$

$$z_R'' = 3500 \text{ km}$$

