Devoir en temps libre n° 1

Exercice 1. (*) Pour tout x réel, on pose

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\ \mathrm{d}t.$$

a. Montrer que la fonction G est bien définie. Vérifier également qu'elle est π-périodique et paire.

b. Montrer que la fonction G est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et exprimer sa dérivée sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

c. Montrer que la fonction Arccos + Arcsin est constante sur $[-1, 1]$, égale à $\pi/2$. Préciser la valeur de la constante.

d. En déduire la valeur de $\mathrm{G}(x)$ pour une valeur de x bien choisie.

e. Donner une expression de $\mathrm{G}(x)$ valable pour tout x réel.

Exercice 2. (*) Soient $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $\mathrm{B} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$.

a. Montrer que le rang de $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est majoré par 2.

Dans la suite, on suppose qu'il existe x réel tel que

$$\mathrm{A} \times \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b. Trouver la valeur de x puis déterminer des bases de Im(AB) et de Ker(AB).

c. Montrer que A et B sont de rang 2.

d. En déduire les égalités Ker(B) = Ker(AB) et Im(A) = Im(AB).

e. Trouver des matrices A et B vérifiant les hypothèses de l'énoncé.

Exercice 3. (*) Pour tout entier $n \geqslant 2$, on considère la fonction polynomiale

$$f_n : x \mapsto x^n + x,$$

définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a. Pour tout entier $n \geqslant 2$, prouver que l'équation $f_n(x) = 1$ possède une unique solution dans $[0, 1]$. Cette solution est notée x_n.

b. Pour tout entier $n \geqslant 2$, comparer les nombres $f_n(x_n)$ et $f_{n+1}(x_n)$. En déduire une inégalité entre x_n et x_{n+1}.

c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 2}$ est convergente.

d. Au moyen d'une démonstration par l'absurde, justifier que la limite de cette suite vaut 1.

On pose $y_n = 1 - x_n$.

e. Pour tout entier $n \geqslant 2$, justifier l'égalité $\ln(y_n) = n \ln(1 - y_n)$.

f. Prouver que $\ln(y_n)$ est équivalent à $-\ln(n)$ quand n tend vers $+\infty$ et en déduire que y_n est équivalent à $\ln(n)/n$.

Exercice 4. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{M}(n)$ le plus grand des entiers m tels que $\dbinom{m}{n-1} > \dbinom{m-1}{n}$.

Trouver la limite de $\mathrm{M}(n)/n$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5. (*) **Polynômes de Tchebychev**

On définit une suite $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes réels en posant

$$\mathrm{T}_0 = 1, \quad \mathrm{T}_1 = \mathrm{X}, \quad \forall n \geqslant 2, \quad \mathrm{T}_n = 2\mathrm{X}\mathrm{T}_{n-1} - \mathrm{T}_{n-2}.$$

Les T_n sont les *polynômes de Tchebychev de première espèce.*

Partie I — étude des polynômes de Tchebychev

Question 1. Calculer les polynômes $\mathrm{T}_2, \mathrm{T}_3, \mathrm{T}_4$.

Question 2. Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout t réel, prouver l'égalité $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = \cos(nt)$.
Pour tout n dans $\mathbb{N}$, justifier que T_n est le seul polynôme vérifiant cette identité.

Question 3. Trouver le degré et le coefficient dominant de T_n.

Question 4. Étudier la parité de T_n.

Question 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre l'équation $\mathrm{T}_n(\cos(t)) = 0$. En déduire la factorisation de T_n.

Question 6. Factoriser également le polynôme T_n'.

Question 7. À l'aide de la formule de Moivre, exprimer $\cos(nt)$ comme un polynôme en $\cos(t)$ et en déduire une formule explicite de T_n.
Quelles propriétés démontrées ci-dessus pourraient être redémontrées à partir de cette formule ?

Partie II — étude d'un produit scalaire

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$, on pose $\varphi(\mathrm{P}, \mathrm{Q}) = \displaystyle\int_0^\pi \mathrm{P}(\cos(t))\,\mathrm{Q}(\cos(t))\ \mathrm{d}t$.

Question 8. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

Question 9. Soient P un polynôme pair et Q un polynôme impair. Montrer que P et Q sont orthogonaux pour φ.

Question 10. Vérifier que $(\mathrm{T}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille orthogonale de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$ pour ce produit scalaire.

Question 11. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout élément $a = (a_0, \dots, a_{n-1})$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\mathrm{F}_n(a) = \int_0^\pi \left(\cos^n(t) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k \cos^k(t)\right)^2 \mathrm{d}t.$$

Montrer que la fonction F_n possède un minimum sur $\mathbb{R}^n$ et trouver sa valeur.

Exercice 6. (**) On considère une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *additive*, ce qui signifie qu'elle vérifie l'identité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x + y) = f(x) + f(y).$$

a. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, prouver la relation $f(nx) = nf(x)$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $q \in \mathbb{Q}$, prouver la relation $f(qx) = qf(x)$.

c. Dans cette question, on suppose que f est continue en 0. Montrer alors que f est continue sur $\mathbb{R}$ puis prouver l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(1) \times x.$$

d. Dans cette question, on suppose que f est monotone. Obtenir la même conclusion qu'à la question précédente.

Exercice 7. (*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, que l'on décompose sous la forme d'un produit de facteurs premiers

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}.$$

Calculer le nombre de diviseurs de n, noté $d(n)$.
