

PC* 25 - DEVOIR N° 0/1

corrigé

1. Microscope

1. Le microscope met en jeu la suite de points conjugués suivante :

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 \quad .$$

Un objet A que l'on voit sans accommoder donne une image finale A_2 à l'infini, donc une image A_1 confondue avec F_2 : $A_1 = F_2$. Pour déterminer la position de cet objet A , utilisons la relation de conjugaison de Newton appliquée à L_1 :

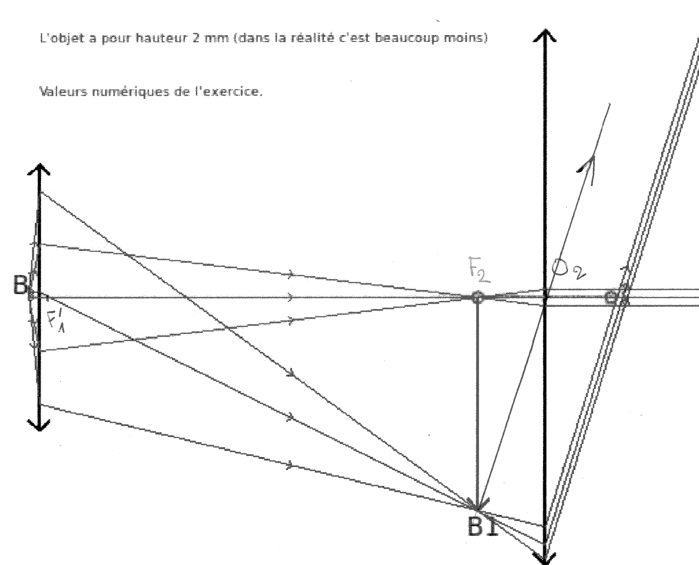
$$\overline{F_1 A} \cdot \overline{F_1' F_2} = -f_1'^2 \quad \overline{F_1 A} = -\frac{f_1'^2}{\Delta} = -0,01 \text{ cm} \quad .$$

Cette réponse suffit, mais on peut la compléter en calculant $\overline{O_1 A} = \overline{O_1 F_1} + \overline{F_1 A} = -0,41 \text{ cm}$. Ce résultat peut aussi s'obtenir en utilisant la relation de Descartes pour L_1 et en utilisant $\overline{O_1 A_1} = f_1' + \Delta$. On obtient

$$\overline{O_1 A} = \frac{-f_1'(\Delta + f_1')}{\Delta} = -0,41 \text{ cm} \quad .$$

2. Il n'est pas facile de réaliser un dessin à l'échelle car l'objet AB donne au travers de L_1 une image intermédiaire très agrandie. De plus, A est très voisin de F_1 et on ne peut guère les distinguer sur une figure. Comme on connaît la position de A_1 (confondu avec F_2), il serait maladroit et trop imprécis de partir de AB pour construire l'image $A_1 B_1$. Mieux vaut placer $A_1 = F_2$, puis placer B_1 arbitrairement dans le plan focal image, tracer le rayon passant par le centre O_1 de L_1 et définir ainsi B , presque dans le plan focal objet de L_1 . On trace ensuite d'autres rayons issus de B . Pour traiter le passage des rayons dans L_2 , on utilise le fait que B_1 est un foyer secondaire objet de L_2 : tous les rayons passant par B_1 émergent de L_2 parallèles à la droite $B_1 O_2$.

Il convient de tracer aussi des rayons issus de A , ce qui est facile sachant que $A_1 = F_2$.

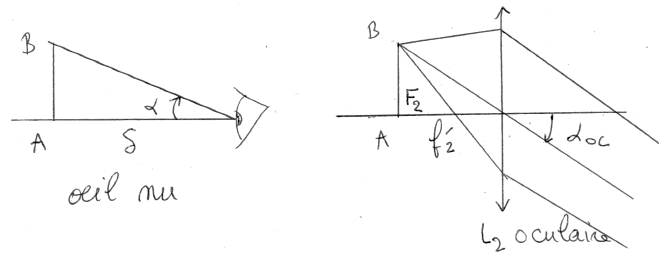


3. Par définition, le grandissement procuré par l'objectif est $\gamma_{\text{obj}} = \overline{A_1 B_1} / \overline{AB}$ et on peut le calculer par $\gamma_{\text{obj}} = \overline{O_1 A_1} / \overline{O_1 A}$. Cependant, la formule avec origine au foyer est ici plus commode :

$$\gamma_{\text{obj}} = \frac{\overline{F_1' A_1}}{\overline{F_1 A}} = -\frac{\overline{F_1' A_1}}{f_1'} = -\frac{\Delta}{f_1'} = -40 \quad .$$

4. Le grossissement est un rapport d'angles. Si on observe l'objet AB à l'œil nu en le plaçant au PP à la distance δ , on le voit sous un angle $\alpha \simeq \tan \alpha = AB/\delta$. Si on observe cet objet au travers de l'oculaire seul, en le plaçant au plan focal objet, il donne une image à l'infini et les rayons s'écartent de l'axe optique de l'angle $\alpha_{\text{oc}} \simeq \frac{AB}{f_2'}$. Le grossissement par l'oculaire est donc

$$G_{\text{oc}} = \frac{\alpha_{\text{oc}}}{\alpha} = \frac{\delta}{f_2'} = 10 \quad .$$



5. Dans le microscope, l'angle de sortie est

$$\alpha' = -\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f'_2}$$

et le grossissement donné par

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \overline{AB}}{f'_2 \overline{AB}/\delta} = -\frac{\gamma_{\text{obj}} \delta}{f'_2} \quad \boxed{G = -\gamma_{\text{obj}} G_{\text{oc}} = 400} .$$

6. On a toujours la chaîne de relations de conjugaison

$$A \xrightarrow{L_1} A_1 \xrightarrow{L_2} A_2 .$$

Quand l'œil n'accommode pas, A se trouve dans la position déterminée dans la question 1 : $\overline{F_1 A} = -0,01 \text{ cm}$. Quand l'œil accommode au plus près, il forme sur la rétine l'image de l'objet situé au punctum proximum, à la distance δ à gauche de F'_2 : $\overline{F'_2 A_2} = -\delta$. Par la relation de Newton appliquée à L_2 , on en déduit

$$\overline{F_2 A_1} = -\frac{f'^2_2}{-\delta} = 0,25 \text{ cm} \quad \text{puis} \quad \overline{F'_1 A_1} = \Delta + \overline{F_2 A_1} = 16,25 \text{ cm}$$

La relation de Newton appliquée à L_1 donne

$$\overline{F_1 A} = -\frac{f'^2_1}{\overline{F'_1 A_1}} = -0,00985 \text{ cm} .$$

Par rapport à la position de la question 1, le point A_1 s'est déplacé vers la droite de 15.10^{-5} cm , c'est à dire $1,5 \mu\text{m}$. La latitude de mise au point est donc très faible : que l'œil accommode ou non, il voit observe presque au même endroit. L'observation se fait presque dans un plan, on voit de très fines tranches de l'objet.

On peut bien entendu utiliser la relation de conjugaison de Descartes et on obtient $\overline{O_1 A} = -0,40985 \text{ cm}$.

7. Soit C le centre de l'objectif et C' son image par l'oculaire. On a $\overline{F_2 C} = -\Delta - f'_1 = -16,4 \text{ cm}$. La relation de Newton appliquée à L_2 donne

$$\overline{F'_2 C'} = -\frac{f'^2_2}{\overline{F_2 C}} = 0,381 \text{ cm} .$$

Par la relation de Descartes, on obtient $\overline{O_2 C'} = 2,88 \text{ cm}$. Le cercle oculaire se situe légèrement en arrière de F'_2 . Le grandissement entre les plans de front passant par C et C' est

$$\gamma = -\frac{f'_2}{\overline{F_2 C}} = -0,152 .$$

Le diamètre du cercle oculaire est donc

$$D' = \gamma D = 1,07 \text{ mm} .$$

Tous les rayons lumineux qui entrent dans le microscope traversent l'objectif de diamètre D et, en sortant, tous traversent le cercle oculaire. En plaçant sa pupille dans le même plan que C' , l'observateur fera donc pénétrer dans son œil toute la lumière qui a traversé l'instrument et détectera ainsi une image bien lumineuse.

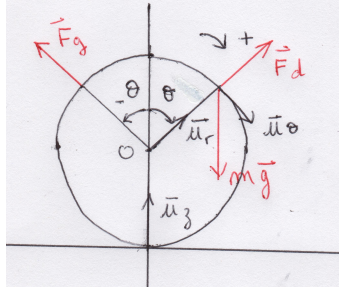
2. Glissade de deux billes sur un anneau

1. Comme la vitesse d'une bille est $v = a\dot{\theta}$, son énergie mécanique s'exprime par

$$E_m = mga \cos \theta + \frac{1}{2}ma^2\dot{\theta}^2 \quad .$$

Chaque bille est soumise à son poids et à la réaction du support qui ne travaille pas en l'absence de frottement. Dans ces conditions, l'énergie mécanique se conserve et vaut $E_m(t=0) = mga$. On en déduit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g(1 - \cos \theta)}{a} \quad .$$



2. Considérons la bille située à droite, dont le mouvement est repéré par l'angle θ orienté dans le sens horaire (il est donc positif sur le dessin). Son accélération vaut $-a\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + a\ddot{\theta} \vec{u}_\theta$ et en projetant la seconde loi de Newton sur $\vec{u}_r$, on obtient

$$-ma\dot{\theta}^2 = -mg \cos \theta + F_d \quad .$$

En utilisant l'expression de $\dot{\theta}^2$ établie dans la question précédente, on en déduit

$$\vec{F}_d = mg(3 \cos \theta - 2) \vec{u}_r \quad .$$

La force $\vec{F}_g$ exercée sur la bille gauche possède la même norme mais est dirigée selon le vecteur $\vec{u}_r$ évalué à l'angle $-\theta$. Elle est donc symétrique de $\vec{F}_d$ par rapport à l'axe vertical.

3. Pour une bille glissant sur l'anneau, la perte de contact est définie par $F_d = 0$, ce qui donne

$$\theta = \theta_0 = \arccos\left(\frac{2}{3}\right) = 48,2^\circ \quad .$$

4. Les composantes horizontales des forces $\vec{F}_d$ et $\vec{F}_g$ se compensent et leurs composantes selon $\vec{u}_z$, égales à $F_d \cos \theta$, s'additionnent. Sur l'ensemble des deux billes, l'anneau exerce donc la résultante $2F_d \cos \theta \vec{u}_z$. D'après le principe des actions réciproques, les deux billes exercent une force opposée sur l'anneau. De la part du support, l'anneau subit la réaction $\vec{R} = R \vec{u}_z$. Comme il est immobile, la somme des forces qu'il subit est nulle, ce qui s'exprime par

$$R - Mg - 2F_d \cos \theta = 0 \quad \text{d'où} \quad R = Mg + 2mg \cos \theta (3 \cos \theta - 2) \quad .$$

5. Le second terme de R devient négatif si $\theta > \theta_0$ et ce terme négatif est susceptible de dépasser Mg en valeur absolue. En étudiant la fonction $f : \theta \mapsto \cos \theta (3 \cos \theta - 2)$, on voit qu'elle présente un minimum égal à $-1/3$ pour $\theta = \theta_1 = \arccos(1/3) \simeq 70^\circ$. Pour $\theta = \theta_1$, $R = Mg - \frac{2}{3}mg$. L'anneau décolle si cette valeur de R est négative, c'est à dire si

$$m > \frac{3}{2}M \quad .$$

Si cette condition est vérifiée, R s'annule pour une valeur θ_{dec} de θ comprise entre θ_0 et θ_1 . En résolvant l'équation $R = 0$ (ce qui n'est pas demandé), on trouve

$$\cos \theta_{\text{dec}} = \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{3M}{2m}}}{3} \quad .$$

3. Glissade d'une corde tendue sur le bord d'une table

1. La corde est inextensible donc tous ses points avancent à la même vitesse égale à celle du point le plus bas, c'est à dire à $\dot{z}(t)$. L'énergie cinétique s'exprime donc par $E_c = \frac{1}{2}m\dot{z}^2$.

2. Le centre de masse G_1 se trouve au milieu de la partie verticale : $z_{G1} = z/2$. L'énergie potentielle de la partie horizontale est nulle. La partie verticale a pour masse $m_1 = \mu z$ et son énergie potentielle est $E_{p1} = -m_1gz_{G1}$. Finalement,

$$E_p = -\frac{1}{2}\mu g z^2 \quad .$$

3. En l'absence de frottement, l'énergie mécanique $E_m = E_c + E_p$ se conserve

$$\frac{1}{2}\mu\ell\dot{z}^2 - \frac{1}{2}\mu g z^2 = -\frac{1}{2}\mu g z_0^2 \quad .$$

En dérivant par rapport au temps on obtient

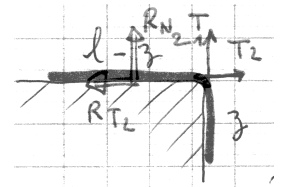
$$\mu\ell\dot{z}\ddot{z} - \mu g z\dot{z} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\ddot{z} - \frac{g}{\ell}z = 0} \quad .$$

4. On résout l'équation différentielle ci-dessus avec les conditions initiales $z(0) = z_0$ et $\dot{z}(0) = 0$. On obtient

$$\boxed{z(t) = z_0 \cosh(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad .$$

5. On suppose que la corde reste immobile. La partie verticale est soumise à son poids et à la tension T_1 en son sommet. À l'équilibre, $T_1 = m_1g = \mu z_0g$. La partie horizontale est soumise à son poids $\mu(\ell - z_0)g \vec{u}_z$, à la réaction normale $-R_{n2} \vec{u}_z$, à la réaction tangentielle $-R_{t2} \vec{u}_x$ et à la tension du fil T_2 à sa droite. À l'équilibre,

$$R_{n2} = \mu g(\ell - z_0) \quad T_2 = R_{t2} \quad .$$



Comme $T_1 = T_2$, on en déduit $R_{t2} = \mu g z_0$. D'après la loi de Coulomb, cette situation de non glissement se maintient si $R_{t2} \leq \mu_s R_{n2}$ ce qui conduit à

$$z_0 \leq z_{\text{lim}} \quad \text{avec} \quad \boxed{z_{\text{lim}} = \frac{\mu_s \ell}{1 + \mu_s}} \quad .$$

6.

$$\mu_s = \frac{z_{\text{lim}}}{\ell - z_{\text{lim}}} = 0,286$$

7. La partie verticale a pour masse $m_1 = \mu z$ et pour accélération $\ddot{z} \vec{u}_z$. Le principe fondamental s'écrit

$$\mu z \ddot{z} = -T_1 + \mu g z \quad \text{donc} \quad T_1 = \mu(g + \ddot{z})z \quad .$$

La partie horizontale a pour masse $m_2 = \mu(\ell - z)$ et pour accélération $\ddot{z} \vec{u}_x$. Le principe fondamental s'écrit en projection

$$\mu(\ell - z)\ddot{z} = T_2 - R_{t2} \quad 0 = \mu(\ell - z)g - R_{n2} \quad .$$

D'après la loi de Coulomb, $R_{t2} = \mu_d R_{n2} = \mu_d \mu g(\ell - z)$ et donc

$$\mu(\ell - z)\ddot{z} = T_2 - \mu_d \mu(\ell - z)g \quad .$$

Comme $T_1 = T_2$, on en déduit par un court calcul

$$\boxed{\ddot{z} - \frac{g}{\ell}(1 + \mu_d)z = -\mu_d g} \quad .$$

8. La seule force non conservative est R_{t2} et sa puissance est $P = -R_{t2}\dot{z} = -\mu_d\mu g(\ell - z)\dot{z}$. Le théorème de la puissance mécanique appliqué à la corde entière s'écrit

$$\frac{dE_m}{dt} = P \quad \text{c'est à dire} \quad \mu\ell\dot{z}\ddot{z} - \mu g z \dot{z} = -\mu_d\mu g(\ell - z)\dot{z} \quad .$$

Après simplification par $\dot{z}$ et en réarrangeant les termes, on retrouve la même équation différentielle.

9. On cherche d'abord une solution particulière constante z_1 , puis on lui ajoute la solution générale $A \cosh \omega_1 t + B \sinh \omega_1 t$ de l'équation homogène. En tenant compte des conditions initiales, on obtient finalement

$$\boxed{z(t) = z_1 + (z_0 - z_1) \cosh(\omega_1 t)} \quad \text{avec} \quad z_1 = \frac{\mu_d \ell}{1 + \mu_d} \quad \text{et} \quad \omega_1 = \sqrt{\frac{g(1 + \mu_d)}{\ell}} \quad .$$

10. On ajoute les quantités de mouvement des parties horizontale et verticale.

$$\vec{p}(t) = \mu z \dot{z} \vec{u}_z + \mu(\ell - z) \dot{z} \vec{u}_x \quad .$$

11. La corde est soumise à son poids, à R_{t2} , à R_{n2} et à la réaction $\vec{R}$ sur le rebord (que l'on cherche). Par contre, les forces T_1 et T_2 sont intérieures au système et n'interviennent pas dans la loi de Newton. On a montré précédemment que R_{n2} compense le poids de la partie horizontale. La loi de Newton s'écrit donc

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{R} + \mu g z \vec{u}_z - R_{t2} \vec{u}_x \quad .$$

On calcule

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \mu(\dot{z}^2 + z\ddot{z}) \vec{u}_z + \mu((\ell - z)\ddot{z} - \dot{z}^2) \vec{u}_x \quad .$$

Comme $R_{t2} = \mu_d\mu g(\ell - z)$, on obtient en projection

$$R_z = \mu(z\ddot{z} + \dot{z}^2) - \mu g z \quad R_x = \mu[(\ell - z)\ddot{z} - \dot{z}^2] + \mu_d\mu g(\ell - z) = -\mu(z\ddot{z} + \dot{z}^2) + \mu(\ell\ddot{z} + \mu_d g(\ell - z))$$

D'après l'équation du mouvement établie à la question 7, $\ell\ddot{z} + \mu_d g(\ell - z) = g z$. Donc

$$\boxed{R_x = -\mu(z\ddot{z} + \dot{z}^2) + \mu g z = -R_z} \quad .$$

$R_x = -R_z > 0$ signifie que la réaction est orientée à 45 degrés vers le haut et la droite.

12. Pour trouver $\dot{z}^2$, on pourrait appliquer le théorème de l'énergie mécanique, mais j'ai choisi la technique équivalente du facteur intégrant. En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{z}dt$, on obtient

$$\dot{z}\ddot{z}dt - \omega_1^2 z \dot{z}dt = -\mu_d g \dot{z}dt \quad .$$

En intégrant entre $(t = 0, z = 0, \dot{z} = 0)$ et $(t, z(t), \dot{z}(t))$ on obtient

$$\frac{1}{2}\dot{z}^2 - \frac{\omega_1^2}{2}(z^2 - z_0^2) = -\mu_d g(z - z_0) \quad \text{puis} \quad \boxed{\dot{z}^2 = \omega_1^2(z^2 - z_0^2) - 2\mu_d g(z - z_0)} \quad .$$

13. Le décollement se produit lorsque $\vec{R} = \vec{0}$. Avec l'expression de R_x fournie par l'énoncé, $R_x = 0$ s'exprime par une équation du second degré en z . Elle possède deux racines

$$z = \ell \frac{(1 + 3\mu_d) \pm \sqrt{\Delta}}{4(1 + \mu_d)} \quad \text{avec} \quad \Delta = (1 + 3\mu_d)^2 + 8(1 + \mu_d) \left[(1 + \mu_d) \frac{z_0^2}{\ell^2} - 2\mu_d \frac{z_0}{\ell} \right]$$

Au début du mouvement, pour $z = z_0$, on a $R_x = z_0(1 + \mu_d) - (1 + \mu_d)z_0^2/\ell = (1 + \mu_d)z_0(1 - z_0/\ell) > 0$. La valeur z_0 est donc entre les deux racines. On cherche une racine plus grand que z_0 , donc on retient

$$\boxed{z_{\text{dec}} = \ell \frac{(1 + 3\mu_d) + \sqrt{\Delta}}{4(1 + \mu_d)}} \quad .$$

14. L'application numérique donne $z_{\text{dec}} = 35,0 \text{ cm}$. La valeur obtenue est en accord avec celle mesurée compte tenu de son incertitude.

4. Réalisation approchée d'une fonction retard

1. La notion de fonction de transfert concerne des tensions sinusoïdales qu'on représente en notation complexe par $e(t) = E_0 e^{j\omega t}$ et $s(t) = S_0 e^{j(\omega t + \varphi)}$. La relation $s(t) = e(t - \tau)$ s'écrit

$$s(t) = E_0 e^{j(\omega(t-\tau))} = E_0 e^{j\omega t} e^{-j\omega\tau} = e(t) e^{-j\omega\tau} \quad .$$

La fonction de transfert est donc donnée par

$$H(j\omega) = \frac{s}{e} = e^{-j\omega\tau} \quad .$$

On voit que $|H(j\omega)| = 1$ donc $G_{dB} = 0$: la partie gain du diagramme de Bode est une droite horizontale. Comme $\varphi = \arg(H) = -\omega\tau$, la partie phase est une droite de pente $-\tau$ (si on porte en abscisse ω en échelle linéaire).

2. Le développement limité à l'ordre 2 de l'exponentielle permet d'écrire

$$H(j\omega) = 1 - j\omega\tau - \frac{1}{2}\omega^2\tau^2 + o(\omega^2\tau^2) \quad .$$

L'approximation par le polynôme de degré deux est correcte si $\omega\tau \ll 1$.

3. Soit A le nœud où sont connectées les deux inductances et le condensateur. La relation du pont diviseur de tension permet d'écrire

$$s = \frac{R}{R + jL\omega} v_A \quad .$$

Pour éliminer v_A , utilisons la loi des nœuds en A en exprimant les trois intensités en fonction des potentiels.

$$\frac{e - v_A}{jL\omega} + \frac{s - v_A}{jL\omega} = v_A jC\omega \quad .$$

On en déduit

$$v_A = \frac{e + s}{2 - LC\omega^2}$$

puis on élimine v_A pour obtenir

$$H = \frac{s}{e} = \frac{1}{1 + 2jL\omega/R - LC\omega^2 - j\omega^3 L^2 C/R} \quad .$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas d'ordre 3.

4.

$$H = 1 - 2jL\omega/R + LC\omega^2 + (2jL\omega/R)^2 + o(\omega^2)$$

$$H \simeq 1 - 2jL\omega/R - \omega^2 \left(\frac{4L^2}{R^2} - LC \right)$$

5. Identifions ordre par ordre l'expression approximative ci-dessous à celle de la question 2. On obtient

$$\tau = \frac{2L}{R} \quad \text{et} \quad \frac{\tau^2}{2} = \frac{4L^2}{R^2} - LC \quad .$$

En éliminant τ , on trouve

$$\boxed{R = \sqrt{\frac{2L}{C}} \quad \text{puis} \quad \tau = \sqrt{2LC} \quad .}$$

L'approximation d'ordre 2 de la question 2 est valide si $\omega\tau \ll 1$, c'est à dire si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$. On remarque que

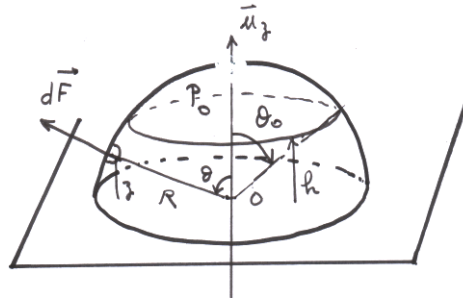
$$\frac{2\omega L}{R} = 2\omega L \sqrt{\frac{C}{2L}} = \sqrt{2}\omega\sqrt{LC} \quad .$$

Si $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$, alors $2\omega L/R \ll 1$ et $LC\omega^2 \ll 1$ ce qui valide aussi le DL de la question 4.

5. Remplissage d'un hémisphère

1. Comme l'eau est introduite lentement, elle est presque à chaque instant à l'équilibre. On peut donc appliquer la loi de Pascal, dans laquelle l'altitude z est ici donnée par $z = R \cos \theta$. Comme l'intérieur de l'hémisphère est en contact avec l'atmosphère par le trou de remplissage, la pression à la surface de l'eau d'altitude h vaut P_0 de sorte que

$$P = P_0 + \rho g(h - z) = P_0 + \rho g(h - R \cos \theta).$$



2. En coordonnées sphériques, un élément de l'hémisphère d'aire d^2S subit de la part de l'eau et de l'air ambiant la force de pression $d\vec{F} = (P - P_0)d^2S\vec{u}_r$. À cause de l'invariance par rotation autour de la droite $(O, \vec{u}_z)$, la résultante de ces forces de pression est dirigée selon $\vec{u}_z$ et la projection de la force infinitésimale est

$$dF_z = (P - P_0)d^2S\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = \rho g(h - R \cos \theta) \cos \theta d^2S.$$

Soit θ_0 l'angle qui repère la surface de l'eau à la hauteur h , défini par $h = R \cos \theta_0$. Comme $d^2S = R^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, la résultante cherchée est donnée par

$$\begin{aligned} F_z &= \int_0^{2\pi} \int_{\theta_0}^{\pi/2} \rho g(h - R \cos \theta) \cos \theta \times R^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= 2\pi R^2 \rho g \int_{\theta_0}^{\pi/2} h \cos \theta \sin \theta d\theta - R \cos^2 \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2\pi R^2 \rho g \left\{ h \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \theta \right]_0^{\pi/2} - R \left[\frac{1}{3} \cos^3 \theta \right]_0^{\pi/2} \right\} \quad \text{avec} \quad \cos \theta_0 = h/R \\ &= 2\pi R^2 \rho g \left\{ \frac{h}{2} \frac{h^2}{R^2} - \frac{R}{3} \frac{h^3}{R^3} \right\} \\ &= 2\pi R^2 \rho g \frac{h^3}{R^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) \\ F_z &= \frac{\pi \rho g h^3}{3}. \end{aligned}$$

Il est étonnant de constater que F_z ne dépend pas du rayon R de l'hémisphère, mais seulement de la hauteur h d'eau. On peut retrouver le résultat par un raisonnement sur le système Σ formé de toute la masse d'eau, mais le calcul ne s'en trouve pas simplifié.

3. À la limite du décollement, F_z a la même norme que le poids Mg de l'hémisphère. La relation $F_z = Mg$ conduit à

$$h = \left(\frac{3M}{\pi \rho} \right)^{1/3}.$$

6. Atmosphère isotherme

Il s'agit d'une question de cours portant sur l'équilibre de l'atmosphère isotherme. En combinant la loi de la statique des fluides et l'équation d'état des gaz parfaits, on obtient

$$P = P_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \rho = \rho_0 e^{-\frac{z}{H}} \quad \text{avec} \quad H = \frac{RT}{Mg}.$$

La pression vaut $P_0/2$ à l'altitude

$$z_{1/2} = H \ln 2 = 5,47 \text{ km}.$$

7. Efficacité d'une pompe à chaleur

Il s'agit d'une question de cours. Le fluide frigorigène mis en jeu dans la machine décrit des cycles ; dans un cycle il reçoit le travail W et le transfert thermique $Q_c < 0$ à la source chaude (l'habitation à chauffer). L'efficacité est définie par $e = -Q_c/W$. En appliquant le premier et le second principe de la thermodynamique sur un cycle au fluide frigorigène, on obtient

$$e \leq e_{\max} = \frac{T_C}{T_C - T_F} = 29 \quad .$$

En pratique, l'efficacité des pompes à chaleur domestiques (souvent appelée coefficient de performance COP) est de l'ordre de 3 ou 4, bien inférieur à la valeur obtenue ici. Cela signifie que le fonctionnement fait subir au fluide frigorigène des transformations très irréversibles.

8. Cycle de Sabathe

1. Les étapes $1 \rightarrow 2$ et $4 \rightarrow 5$ sont adiabatiques réversibles, donc isentropiques. Dans la première, le gaz est comprimé donc il s'échauffe ; dans la seconde il se détend donc se refroidit.

Dans l'étape $2 \rightarrow 3$, la pression augmente et le volume est constant donc, d'après la loi des gaz parfaits, T augmente. Comme V est constant on peut écrire

$$S - nC_{vm} \ln T = S_2 - nC_{vm} \ln T_2 \quad \text{et} \quad T = T_2 e^{\frac{S-S_2}{nC_{vm}}} \quad .$$

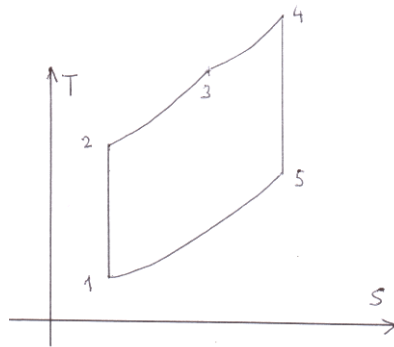
Dans le plan (S, T) , on obtient une portion d'exponentielle.

Dans l'étape $3 \rightarrow 4$, la température augmente à nouveau mais cette fois-ci, c'est P est fixée et en utilisant la seconde expression de S on obtient

$$T = T_3 e^{\frac{S-S_3}{nC_{pm}}} \quad .$$

On obtient à nouveau une portion d'exponentielle, mais comme $C_{pm} > C_{vm}$, elle est moins pentue que la précédente.

L'étape $5 \rightarrow 1$ est analogue à l'étape $2 \rightarrow 3$, mais parcourue dans le sens inverse. Le cycle présente donc l'allure ci-dessous. Comme il convient pour un cycle moteur, il est décrit dans le sens horaire.



2. Pour un cycle moteur, le rendement est défini par $r = -W/Q_c$ où W est le travail reçu par le fluide sur un cycle et Q_c le transfert thermique reçu depuis la source chaude. D'après le premier principe appliqué sur un cycle, on a

$$W + Q_c + Q_f = 0 \quad \text{donc} \quad -W = Q_c + Q_f \quad \text{et} \quad r = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} \quad .$$

Dans le moteur réel, une combustion a lieu au sein du fluide mais on modélise cet apport d'énergie par un échange avec une source chaude qui aurait lieu dans les étapes $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$: $Q_c = Q_{23} + Q_{34}$. L'échange avec la source froide correspond au refroidissement $5 \rightarrow 1$ donc $Q_f = Q_{51}$.

L'étape $2 \rightarrow 3$ est isochore donc $Q_{23} = nC_{vm}(T_3 - T_2)$. L'étape $3 \rightarrow 4$ est isobare donc $Q_{34} = nC_{pm}(T_4 - T_3)$. L'étape $5 \rightarrow 1$ est isochore donc $Q_{51} = nC_{vm}(T_1 - T_5)$. On en déduit

$$r = 1 + \frac{c_v(T_1 - T_5)}{c_v(T_3 - T_2) + c_p(T_4 - T_3)} = 1 + \frac{(T_1 - T_5)}{T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)} \quad .$$

Il convient maintenant d'éliminer les températures.

- Comme l'étape $1 \rightarrow 2$ est adiabatique réversible, on peut utiliser la loi de Laplace sous la forme $T_1 V_1^{\gamma-1} = T_2 V_2^{\gamma-1}$ pour obtenir $T_2 = T_1 a^{\gamma-1}$.
- Comme l'étape $2 \rightarrow 3$ est isochore, on peut écrire

$$\frac{nRT_2}{T_2} = \frac{nRT_3}{P_3} \quad \text{d'où} \quad T_3 = T_2 b = T_1 b a^{\gamma-1} \quad .$$

- Comme l'étape $3 \rightarrow 4$ est isobare, on peut écrire

$$\frac{nRT_3}{V_3} = \frac{nRT_4}{V_4} \quad \text{d'où} \quad T_4 = T_3 s = T_1 s b a^{\gamma-1} \quad .$$

- Enfin, pour l'étape $4 \rightarrow 5$, la loi de Laplace donne

$$T_5 = T_4 \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_4 \left(\frac{V_4}{V_3} \frac{V_3}{V_1} \right)^{\gamma-1} = T_4 \left(\frac{s}{a} \right)^{\gamma-1} = T_1 b s^{\gamma} \quad .$$

En reportant ces expressions des températures dans celle de r , on obtient

$$r = 1 + \frac{1 - b s^{\gamma}}{a^{\gamma-1} [b - 1 + \gamma b (s - 1)]}$$

3. Avec les valeurs proposées, on obtient $r = 0,56$. Pour un cycle de Carnot entre les températures $T_{\min} = T_1$ et $T_{\max} = T_4$, on aurait

$$r_C = 1 - \frac{T_1}{T_4} = 1 - \frac{1}{s b a^{\gamma-1}} = 0,89 \quad .$$

Le rendement réel est inférieur, ce qui signifie que le cycle n'est pas réversible. Avec la modélisation adoptée, le gaz est brutalement mis au contact de la source de chaleur à la température T_4 dans les étapes $2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, et il se produit un choc thermique. De même, un choc thermique se produit dans l'étape $5 \rightarrow 1$.

9. Transformations de l'eau

1. Il s'agit du phénomène de surfusion. Il le manifeste par exemple lors de pluies verglaçantes : l'eau liquide arrive au sol à une température négative et le congèle rapidement après l'impact. Un phénomène analogue se produit dans les bouillottes magiques impliquant la surfusion de l'acétate de sodium.

2. Comme l'eau et la glace coexistent à l'équilibre dans l'état final, la température à l'issue de la transformation est T_f . La transformation a lieu à pression atmosphérique et le récipient est calorifugé : elle est donc isenthalpique. Comme l'enthalpie est une fonction d'état, on peut exprimer sa variation en décomposant la transformation en deux étapes hypothétiques : d'abord, l'eau voit sa température évoluer de T_0 à T_f , puis 50% de l'eau se solidifie. On obtient ainsi

$$\Delta H = m c_{\ell} (T_f - T_0) - 0,5 m \ell_f \quad .$$

On en déduit

$$T_0 = T_f - 0,5 \frac{\ell_f}{c_{\ell}} = -39,5^{\circ}\text{C} \quad .$$

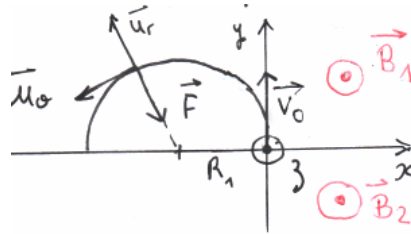
Pour une solidification totale et une température finale égale à T_f , il suffit de remplacer le coefficient 0,5 par 1 pour trouver $T_0 = -78,9^{\circ}\text{C}$. On devine que l'eau se solidifie entièrement si $T_0 < -78,9^{\circ}\text{C}$: dans ce cas, la température finale est inférieure à T_f et il faudrait ajouter au bilan enthalpique un nouveau terme correspondant au refroidissement de la glace. C'est l'objet de la question suivante.

3. Maintenant, $\Delta H = m c_{\ell} (T_f - T_0) - m \ell_f + m c_g (T_1 - T_f)$. Comme $\Delta H = 0$, on obtient

$$T_1 = T_f + \frac{\ell_f - c_{\ell} (T_f - T_0)}{c_g} = -42,1^{\circ}\text{C} \quad .$$

10. Dérive d'un électron dans un champ magnétique

1. L'électron est soumis à la force de Lorentz $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$ orthogonale à la vitesse et qui ne travaille pas. D'après le théorème de la puissance cinétique, sa vitesse conserve donc une norme constante égale à v_0 . On sait qu'un électron en mouvement dans un champ magnétique uniforme et possédant une vitesse initiale orthogonale à ce champ présente un mouvement circulaire uniforme. On peut le démontrer en résolvant les équation cartésiennes du mouvement, en utilisant par exemple un détour par la notation complexe, mais l'énoncé ne le demande pas.



Ayant ainsi admis que le mouvement est circulaire, il est aisé d'exprimer son rayon. La vitesse est $\vec{v} = v_0 \vec{u}_\theta$ donc $\vec{F}_L = -ev_0 \vec{u}_\theta \wedge B_1 \vec{u}_z = -ev_0 B_1 \vec{u}_r$. En appliquant la seconde loi de Newton, on obtient par projection sur $\vec{u}_r$

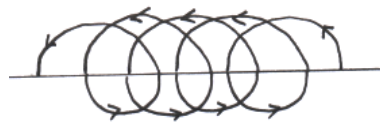
$$-m \frac{v_0^2}{R_1} = -ev_0 B_1 \quad \text{donc} \quad R_1 = \frac{mv_0}{eB_1}.$$

2. L'électron atteint la zone où règne B_2 quand il a parcouru un demi-cercle de rayon R_1 ; le temps nécessaire pour cela est

$$t_1 = \pi R_1 / v_0 = \frac{m\pi}{eB_1}.$$

Dans la région où règne B_2 , il décrit un nouveau demi-cercle de rayon $R_2 = mv_0 / (eB_2)$.

3. La durée du mouvement dans la seconde région est $t_2 = m\pi / (eB_2)$. À l'instant $t_1 + t_2$, l'électron regagne la première région et décrit à nouveau un demi-cercle de rayon R_1 . Comme $B_2 > B_1$, $R_2 < R_1$ et, après deux demi-tours, l'électron s'est décalé vers la gauche par rapport à sa position initiale. Ce phénomène se répète de sorte que peu à peu, il dérive vers les x négatifs. En deux demi-tours, c'est à dire pour une durée $t_1 + t_2$, le décalage est $2R_1 - 2R_2$.

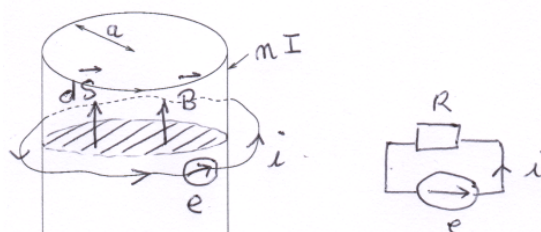


On définit la vitesse de dérive v_d comme la vitesse moyenne après un nombre entiers de tours :

$$v_d = \frac{2R_1 - 2R_2}{t_1 + t_2} = \frac{2v_0 \frac{1}{B_1} - \frac{1}{B_2}}{\pi \frac{1}{B_1} + \frac{1}{B_2}} = \frac{2v_0(B_2 - B_1)}{\pi(B_2 + B_1)}.$$

11. Courant induit dans une spire entourant un solénoïde

1. Le solénoïde infini crée dans sa région interne un champ magnétique uniforme, colinéaire à son axe de révolution, orienté selon la règle de la main droite et de norme $\mu_0 nI$. À l'extérieur, le champ magnétique est nul.



2. Comme I dépend du temps, B dépend du temps et le flux magnétique au travers du circuit entourant le solénoïde varie. D'après la loi de Faraday, un courant induit y apparaît donc.

Lorsque le circuit présente une forme cabossée, comme c'est le cas sur la figure de l'énoncé, le calcul du flux peut sembler délicat. En réalité, on peut le calculer au travers de n'importe quelle surface s'appuyant sur le circuit et il suffit de la choisir de manière que son intersection avec le solénoïde soit un cercle. Comme le champ magnétique est nul hors du solénoïde, le flux se réduit à celui traversant le disque de rayon a . Avec l'orientation choisie sur la figure ci-contre, le vecteur surface est orienté vers le haut et le flux est $\Phi = \pi a^2 \mu_0 n I(t)$.

La fem induite est donnée par

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = \pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t \quad .$$

La loi des mailles donne

$$i = \frac{e}{R} = \frac{\pi a^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t}{R}$$

3. Dans ce cas, la surface limitée par le circuit induit est un cercle de rayon r et non plus de rayon a . Dans l'expression de Φ , il suffit de remplacer a par r et on obtient finalement

$$u = \frac{\pi r^2 \mu_0 n \omega I_0 \sin \omega t}{R} \quad .$$

4. Par définition du coefficient d'induction mutuelle, le flux envoyé par le solénoïde à travers l'autre circuit s'exprime par $\Phi = MI$. En identifiant cette expression celle écrite plus haut pour Φ , on obtient l'expression de M dans chacun des deux cas précédents :

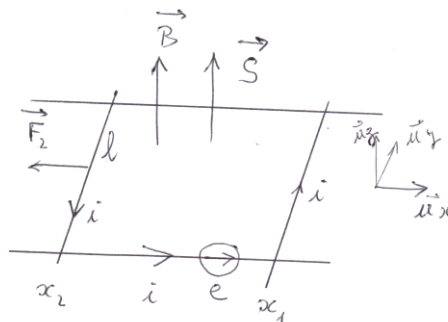
$$M = \mu_0 n \pi a^2 \quad \text{et} \quad M = \mu n \pi r^2 \quad .$$

5. Les coefficients de mutuelle induction sont symétriques, ce qui signifie que le même coefficient M permet d'exprimer le flux envoyé par le circuit à travers le solénoïde : $\Phi' = Mi(t)$. Par définition, ce flux correspond à l'orientation choisie plus haut pour I . En conservant cette même orientation, la fem induite et l'intensité induite dans le solénoïde sont données par

$$e' = -\frac{d\Phi'}{dt} = M \omega i_0 \sin \omega t \quad I' = \frac{e'}{R'} = \frac{M \omega i_0 \sin \omega t}{R'} \quad .$$

12. Mouvements couplés de deux barres

- a) L'ensemble formé des deux barres et des rails constitue un circuit fermé. Quand la première barre se déplace, le flux magnétique au travers de ce circuit se modifie et, d'après la loi de Faraday, une fem et un courant induit y prennent naissance. Ce circuit circule notamment dans la seconde barre qui, plongée dans un champ magnétique, est soumise à une force de Laplace et se met donc en mouvement. D'après la loi de Lenz, on peut s'attendre ce que ce mouvement modère la variation du flux et que le courant induit rende plus difficile le mouvement de la première barre.



- b) Notons x_1 et x_2 les abscisses des deux barres. Avec l'orientation choisie sur la figure, le flux au travers du circuit s'exprime par $\Phi = B\ell(x_1 - x_2)$ et la fem induite est donnée par

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = B\ell(v_1 - v_2) \quad .$$

D'après la loi des mailles,

$$i = \frac{e}{R} = \frac{B\ell(v_2 - v_1)}{R} \quad .$$

- c) La seconde barre est soumise à la force de Laplace $\vec{F}_2 = -i\ell \vec{u}_y \wedge B \vec{u}_z = -i\ell B \vec{u}_x$. Elle subit aussi son poids et la réaction des rails, mais ces deux forces sont colinéaires à $\vec{u}_z$. La projection de la seconde loi de Newton du $\vec{u}_x$ s'écrit :

$$m \frac{dv_2}{dt} = -i\ell B \quad .$$

En éliminant i , on obtient

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{mR} v_2 = \frac{B^2 \ell^2}{mR} v_1 \quad .$$

- d) Posons $\tau = mR/(B^2 \ell^2)$. La solution générale de l'équation différentielle ci-dessus est la somme de la solution générale $A^{-t/\tau}$ de l'équation homogène associée et d'une solution particulière de l'équation complète. Dans le cas où v_1 est constant, cette solution particulière est $v_2 = v_1$. À $t = 0$, la seconde barre est immobile donc $v_2(0) = 0$. En utilisant cette condition initiale, on obtient

$$v_2(t) = v_1(1 - e^{-t/\tau}) \quad .$$

Cela signifie que la seconde barre se met peu à peu en mouvement jusqu'à atteindre asymptotiquement la vitesse de la première. Dans cette limite, le flux ne varie plus, donc l'intensité s'annule et les deux barres conservent une vitesse constante.

- e) Dans ce cas, il est commode de chercher une solution particulière sinusoïdale en notation complexe : $v_2(t) = \text{Re}(\underline{v}_2)$ avec $\underline{v}_2 = \underline{A}e^{j\omega t}$. Comme $dv_2/dt = j\omega v_2$, l'équation différentielle s'écrit en représentation complexe

$$j\omega \underline{v}_2 + \frac{\underline{v}_2}{\tau} = \frac{v_0 e^{j\omega t}}{\tau} \quad \underline{v}_2 = \frac{v_0 e^{j\omega t}}{1 + j\omega\tau} \quad .$$

En extrayant la partie réelle, on trouve la solution particulière

$$\text{Re}(\underline{v}_2) = \frac{v_0}{1 + \omega^2 \tau^2} (\cos \omega t + \omega \tau \sin \omega t) \quad .$$

En ajoutant la solution de l'équation homogène, puis en tenant compte de la condition initiale, on trouve finalement

$$v_2(t) = \frac{v_0}{1 + \omega^2 \tau^2} \left(\cos(\omega t) + \omega \tau \sin(\omega t) - e^{-t/\tau} \right) \quad .$$

On peut aussi écrire

$$v_2(t) = \frac{v_0}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} \cos(\omega t - \varphi) - \frac{v_0}{1 + \omega^2 \tau^2} e^{-t/\tau}, \quad \text{avec } \varphi = \arctan(\omega \tau) \quad .$$

Cela montre qu'après quelques fois τ , on atteint un régime permanent dans lequel la seconde barre oscille avec un retard de phase φ sur la première.

13. Mesure de la composante verticale du champ magnétique terrestre

Lorsqu'on retourne la bobine, le flux du champ magnétique terrestre qui la traverse se modifie. Un courant induit d'intensité i y apparaît ce qui provoque la charge du condensateur. Notons B_z la composante verticale du champ magnétique terrestre, avec une orientation vers le haut. Le dessin de l'énoncé ne permet pas de savoir dans quel sens les spires sont enroulées sur la bobine et nous supposons que l'intensité i indiquée correspond au sens de rotation positif autour de $\vec{u}_z$. Soit Φ le flux magnétique défini par cette orientation. Comme l'ALI fonctionne en régime linéaire, la tension entre v_+ et v_- est nulle et la loi des mailles aux bornes de la bobine s'écrit

$$e + Ri + L \frac{di}{dt} = 0 \quad .$$

Comme $v_- = 0$, la tension v_s s'applique aux bornes du condensateur avec

$$i = C \frac{dv_s}{dt} \quad .$$

La relation précédente s'écrit donc

$$-\frac{d\Phi}{dt} + RC \frac{dv_s}{dt} + L \frac{di}{dt} = 0 \quad .$$

Comme on ne connaît pas la manière exacte dont la bobine se déplace, $d\Phi/dt$ nous est inaccessible et on ne peut pas résoudre ces équations pour exprimer i et v_s comme des fonctions du temps, et cela n'est d'ailleurs pas demandé. Au lieu de cela, intégrons la relation précédente entre l'instant $t = 0$ de début du mouvement et un instant t_f postérieur à sa fin. On obtient

$$-\Phi(t_f) + \Phi(0) + RC(v_s(t_f) - v_s(0)) + L(i(t_f) - i(0)) = 0 \quad .$$

Avant le mouvement, i est nul donc $i(0) = 0$ par continuité du courant dans une inductance. Après un bref régime transitoire, i s'annule après qu'on a reposé la bobine donc $i(t_f) = 0$. Par ailleurs

$$\Phi(0) = NSB_z \quad \text{et} \quad \Phi(t_f) = -\Phi(0) \quad \text{puisque l'on a retourné la bobine.}$$

On obtient ainsi

$$B_z = -\frac{RCv_s(t_f)}{2NS} = -39 \mu\text{T} \quad .$$

En France, le champ magnétique terrestre est de l'ordre de $50 \mu\text{T}$ et s'enfonce dans le sol avec un angle d'environ 60 degrés par rapport à l'horizontale. Le signe et l'ordre de grandeurs obtenus sont donc corrects.

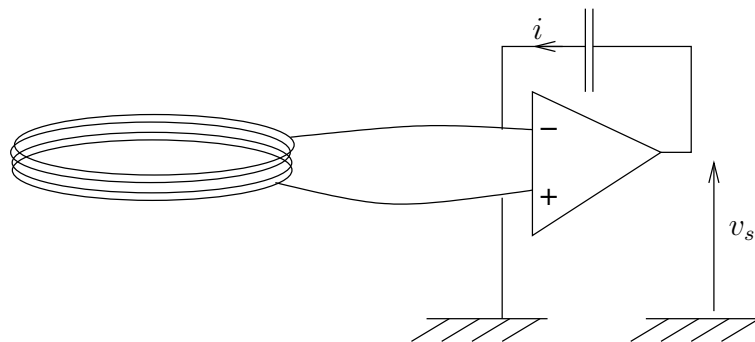


FIGURE 1 – Dispositif pour la mesure du champ magnétique terrestre

Voyage vers Mars

Centrale PC 22

Q1. La force de gravitation entre deux astres de masses M_1 et M_2 séparés d'une distance d s'exprime par $F = GM_1M_2/d^2$. On en déduit que G a pour dimension $M^{-1}.L^3.T^{-2}$. Dans le système international d'unités, cette constante s'exprime en $\text{kg}^{-1}.\text{m}^3.\text{s}^{-2}$.

Q2. Question de cours utilisant le théorème du moment cinétique et le caractère central de la force gravitationnelle.

Q3. Encore une question de cours. $C = r^2\dot{\theta} = L_O/m$ se nomme constante des aires.

Q4. Dans le cas d'une orbite circulaire, la seconde loi de Newton appliquée dans le référentiel héliocentrique supposé galiléen au corps de masse m s'écrit en projection sur $\vec{u}_r$

$$-m\frac{V}{R} = \frac{GM_s m}{R^2} \quad \text{d'où} \quad V = \sqrt{\frac{GM_s}{R}} \quad V_T = 29,8 \text{ km.s}^{-1} \quad V_M = 24,2 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q5. On connaît l'expression $E_p = -GM_s m/R$. L'énergie mécanique est donnée par

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mV^2 - \frac{GM_s m}{R} = \frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R} - \frac{GM_s m}{R} \quad \boxed{E_p = -\frac{1}{2}\frac{GM_s m}{R}} \quad .$$

Q6.

$$T = \frac{2\pi R}{V} = \frac{2\pi R}{\sqrt{GM_s/R}} = \frac{2\pi R^{3/2}}{\sqrt{GM_s}}$$

Q7. La trajectoire est une ellipse dont le Soleil est un foyer. Elle est tangente aux deux orbites circulaires en deux points où la vitesse est perpendiculaire à $\vec{OM}$. Sur une trajectoire elliptique, cette configuration ne se rencontre qu'aux deux extrémités du grand axe, au périhélie et à l'aphélie. Comme le rayon de l'orbite de Mars est supérieur à ce celui de l'orbite de la Terre, le point de départ est le périhélie et le point d'arrivée est l'aphélie.

Q8. Cette question se résout en utilisant la conservation de l'énergie mécanique. En effet, la connaissance du périhélie et de l'aphélie détermine la longueur du grand axe qui, pour une orbite elliptique, est directement liée à l'énergie mécanique, elle-même liée à la vitesse initiale.

La longueur du grand axe est $2a = a_T + a_M$ et l'énergie mécanique donnée par

$$E_m = -\frac{GM_s m}{2a} = -\frac{GM_s m}{a_T + a_M} \quad .$$

En exprimant cette énergie à l'instant initial, on obtient

$$-\frac{GM_s m}{a_T + a_M} = \frac{1}{2} m V_T'^2 - \frac{GM_s m}{a_T} \quad .$$

On en déduit

$$V_T' = \sqrt{\frac{2GM_s a_M}{a_T(a_T + a_M)}} = V_T \sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} \quad \Delta V_T = V_T \left(\sqrt{\frac{2a_M}{a_T + a_M}} - 1 \right) = 2,93 \text{ km.s}^{-1} \quad .$$

Q9. Soit T la période de rotation sur l'ellipse ; elle est donnée par la troisième loi de Kepler vue dans la question 4, en remplaçant R par $a = (a_T + a_M)/2$. Ici, le vaisseau parcourt seulement une demi-ellipse donc

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} = 22,34 \cdot 10^6 \text{ s} = 258,7 \text{ jours} \quad .$$

Q10. Pendant que le vaisseau parcourt la demi-ellipse, Mars se déplace sur son orbite et, pour qu'elle se trouve à l'aphélie A lorsque le vaisseau atteint ce point, elle doit se trouver largement « en arrière » de ce point à l'instant $t = 0$ où le vaisseau est parti de P . Plus précisément, la vitesse angulaire de Mars sur son orbite est

$$\omega_M = \frac{v_M}{a_M} = \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}} \quad .$$

Pendant la durée Δt du vol, elle parcourt l'angle $\omega_M \Delta t$ donc $\theta_M(\Delta t) = \theta_M(0) + \omega_M \Delta t$. La condition $\theta_M(\Delta t) = \pi$ équivaut $\theta_M(0) = \pi - \omega_M \Delta t$ ce qui donne après élimination de ω_M et Δt :

$$\alpha_0 = \theta_M(0) = \pi \left[1 - \left(\frac{a_T + a_M}{2a_M} \right)^{3/2} \right] \quad \alpha_0 = 0,245\pi = 44^\circ \simeq \pi/4 \quad .$$

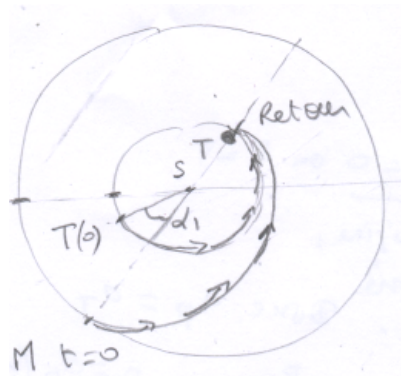
Q11. Dans le cas envisagé, le vaisseau parcourt la seconde moitié de l'ellipse et revient sur l'orbite terrestre après une durée $2\Delta t$. Pendant ce temps, la Terre a tourné sur son orbite à la vitesse angulaire $\omega_T = \sqrt{GM_s/a_T^3}$ et atteint la position angulaire

$$\begin{aligned} \theta_T(2\Delta t) &= \omega_T T = \sqrt{GM_s/a_T^3} \times 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM_s}} \\ \theta_T(2\Delta t) &= 2\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} = 2\pi \times 1,41 \quad . \end{aligned}$$

La terre a donc parcouru plus d'un tour sur son orbite, presque un tour et demi. Elle ne se trouve plus du tout au même endroit que lors du lancement et le vaisseau, en revenant près de l'orbite terrestre au point de lancement, ne retrouvera pas la Terre.

Q12. Pendant ce voyage retour, le vaisseau parcourt une demi-ellipse et son angle polaire augmente de π pendant une durée Δt égale à celle du voyage aller. Pendant ce temps, la Terre tourne plus rapidement sur son orbite circulaire à la vitesse angulaire $\omega_T \Delta t$. Pour que les deux objets coïncident à la fin du trajet retour, il convient donc que la Terre présente au départ un retard de phase

$$\alpha_1 = \omega_T \Delta t - \pi = \sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} \frac{\pi \left(\frac{a_T + a_M}{2} \right)^{3/2}}{\sqrt{GM_s}} - \pi \quad \boxed{\alpha_1 = \pi \left[\left(\frac{a_T + a_M}{2a_T} \right)^{3/2} - 1 \right] = 0,414\pi = 74,6^\circ} \quad .$$



Q13. Cette question est assez difficile alors que la formulation de l'énoncé laisse penser que la réponse se déduit facilement de la précédente !

La Terre tourne à la vitesse angulaire ω_T et Mars à la vitesse angulaire ω_M plus faible. Ainsi, $\theta_T - \theta_M$ croît un fil du temps à la vitesse angulaire relative $\omega_T - \omega_M$. Lorsque le vaisseau atteint Mars en A, la Terre se trouve à l'angle $\omega_T \Delta t$ et possède donc une avance de phase $\omega_T \Delta t - \pi = \alpha_1$ (j'ai placé cette position de la Terre sur la figure). Au contraire, lorsque le vaisseau repart de Mars, la Terre doit se trouver en retard de l'angle α_1 . La Terre doit donc acquérir un retard de phase de $-2\alpha_1$. Comme la Terre tourne plus vite que Mars, ce retard s'entend modulo 2π . En tournant plus vite que Mars, la Terre tend à la rattraper par l'arrière. Autrement dit, $\theta_T - \theta_M$ augmente de $2\pi - 2\alpha_1$ entre l'arrivée sur Mars et le début du voyage retour. La durée δt de séjour sur Mars est donc telle que

$$(\omega_T - \omega_M)\delta t = 2\pi - 2\alpha_1 \quad \text{d'où} \quad \delta t = \frac{2(\pi - \alpha_1)}{\sqrt{\frac{GM_s}{a_T^3}} - \sqrt{\frac{GM_s}{a_M^3}}} \quad \delta t = 39,7 \cdot 10^6 \text{ s} = 459 \text{ j} \quad .$$

Au lancement depuis la Terre, Mars doit être en avance de α_0 , et à nouveau cette avance est définie modulo 2π et la configuration souhaitée se reproduit périodiquement avec une période qui définit l'intervalle entre deux lancements possibles :

$$T_{\text{lance}} = \frac{2\pi}{\omega_T - \omega_M} = 67,8 \cdot 10^6 \text{ s} = 784 \text{ j} \quad .$$

Q14. Voir le document réponse.

Q15. À $t = 0$, la vitesse du vaisseau est tangente à l'orbite terrestre, donc perpendiculaire au vecteur position. Sur une trajectoire elliptique, cela ne se rencontre qu'au périhélie et à l'aphélie, donc le point de départ est soit l'un soit l'autre de ces deux points. Or, dans les premiers instants, la distance r croît donc la position initiale ne constitue par un maximum de distance. Ainsi, le début de la trajectoire correspond à son périhélie et $r_P = a_T$.

On peut fournir une réponse plus formelle. À partir de l'équation de la conique fournie, on calcule

$$\frac{dr}{d\theta} = -\frac{pe \sin \theta}{(1 + e \cos \theta)^2} \quad .$$

Le périhélie et l'aphélie correspondent à des extremums de r et à l'annulation de cette dérivée. Elle se produit lorsque $\theta = 0$ et $\theta = \pi$, avec des valeurs de r

$$r_{\min} = r_p = r(0) = \frac{p}{1 + e} \quad r_{\max} = r_a = r(\pi) = \frac{p}{1 - e} \quad .$$

Au lancement, $\theta = 0$ donc on se trouve au périhélie, et on sait que $r(0) = r_T$. Donc $r_P = a_T$.

Q16. On vient de montrer que $a_T = p/(1 + e)$. À l'arrivée sur Mars, $r = a_M$ et $\theta = 3\pi/4$ donc

$$a_M = \frac{p}{1 - \frac{e}{\sqrt{2}}} \quad p = a_M \left(1 - \frac{e}{\sqrt{2}}\right) \quad .$$

En éliminant p entre ces deux relations, on obtient facilement

$$e = \frac{a_M - a_T}{a_T + \frac{a_M}{\sqrt{2}}} \quad e = 0,251 \quad .$$

Ce n'est pas demandé, mais pour faciliter le tracé de la trajectoire on peut calculer

$$r_{\max} = \frac{a_M(1 - e/\sqrt{2})}{1 - e} = 1,09 a_M \quad .$$

Q17. Le grand axe de la trajectoire elliptique est

$$2a = r_{\min} + r_{\max} = \frac{p}{1+e} + \frac{p}{1-e} = \frac{2p}{1-e^2} = \frac{2a_T(1+e)}{1-e^2} = \frac{a_T}{1-e} \quad .$$

En reprenant l'expression de l'énergie mécanique vue à la question 5, dans laquelle on remplace $2R$ par $2a$, on obtient

$$E_m = -\frac{GM_s m(1-e)}{2a_T} = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad .$$

Q18. On évalue E_m comme la somme $E_c + E_p$ à $t = 0$.

$$E_m = \frac{1}{2}mV_T'^2 - \frac{GM_s m}{a_T} = \frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 \quad .$$

En l'identifiant à l'expression obtenue dans la question précédente, on obtient

$$\frac{1}{2}mV_T''^2 - mV_T^2 = -\frac{1}{2}mV_T^2(1-e) \quad \text{d'où on tire} \quad \boxed{V_T'' = \sqrt{1+e} V_T} \quad .$$

Q19.

$$\Delta V_T' = (\sqrt{1+e} - 1) V_T = 0,118 V_T = 3,47 \text{ km.s}^{-1}$$

Q20. C est une constante du mouvement ; on la trouve grâce aux conditions initiales

$$C = r \times r\dot{\theta} = a_T V_T'' \quad .$$

Q21. Comme $C = r^2 d\theta/dt$, le temps mis pour balayer l'angle $d\theta$ est $dt = r^2 d\theta/C$. Avec l'équation de la conique,

$$r = \frac{p}{1+e \cos \theta} = \frac{a_T(1+e)}{1+e \cos \theta} \quad \text{donc} \quad dt = \frac{a_T^2(1+e)^2}{(1+e \cos \theta)^2} \frac{d\theta}{a_T V_T''} = \frac{a_T(1+e)^2 d\theta}{a_T V_T''(1+e \cos \theta)^2} \quad .$$

On obtient le temps de parcours par intégration

$$\Delta t' = \int_0^{\Delta t'} dt = \frac{a_T(1+e)^2}{V_T''} \int_0^{3\pi/4} \frac{d\theta}{(1+e \cos \theta)^2} = \frac{2,15 a_T(1+e)^2}{V_T''} \quad \Delta t' = 15,1.10^4 \text{ s} = 175 \text{ j} \quad .$$

Questions 7 et 10

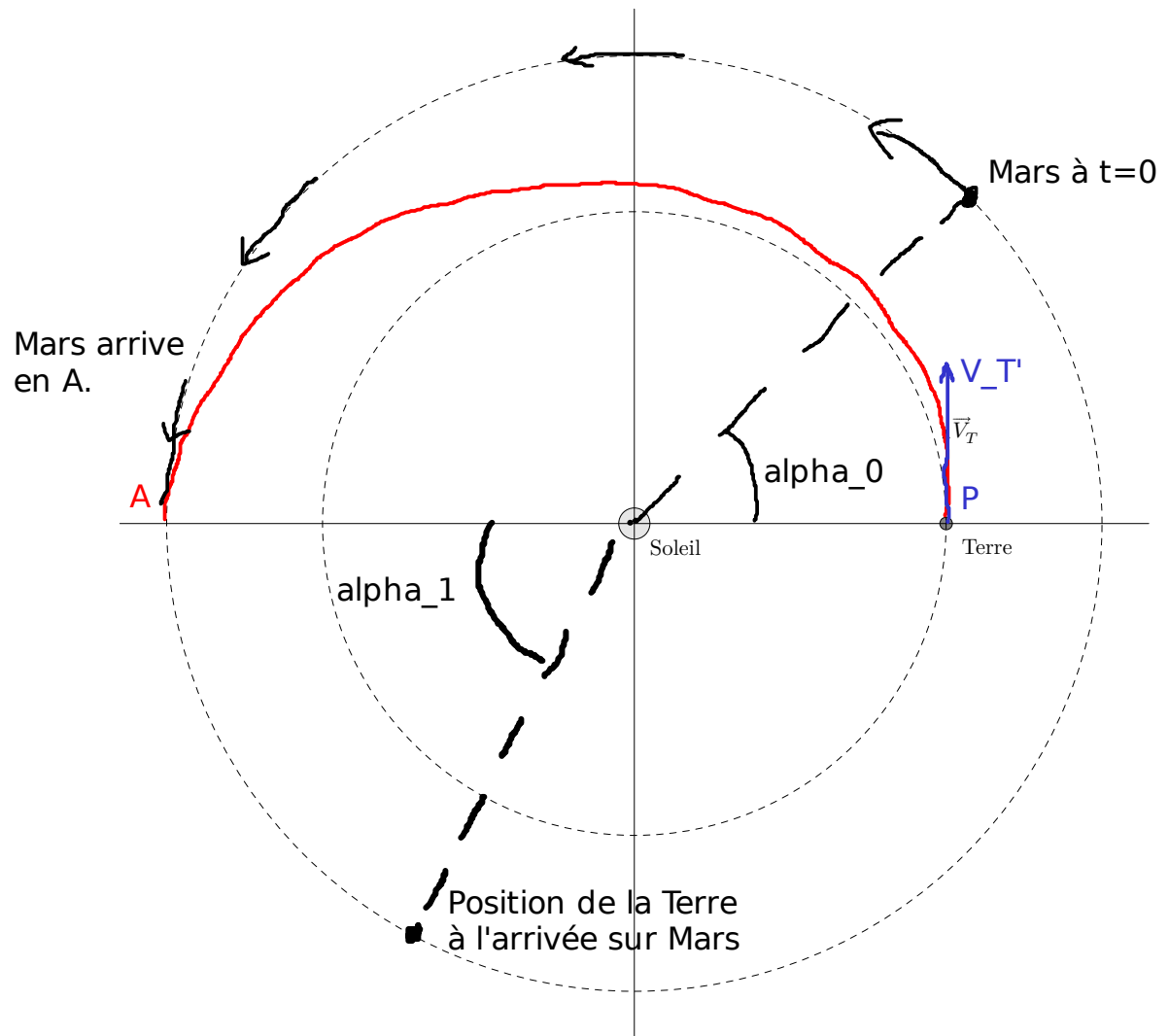


Figure A

Questions 14 et 16

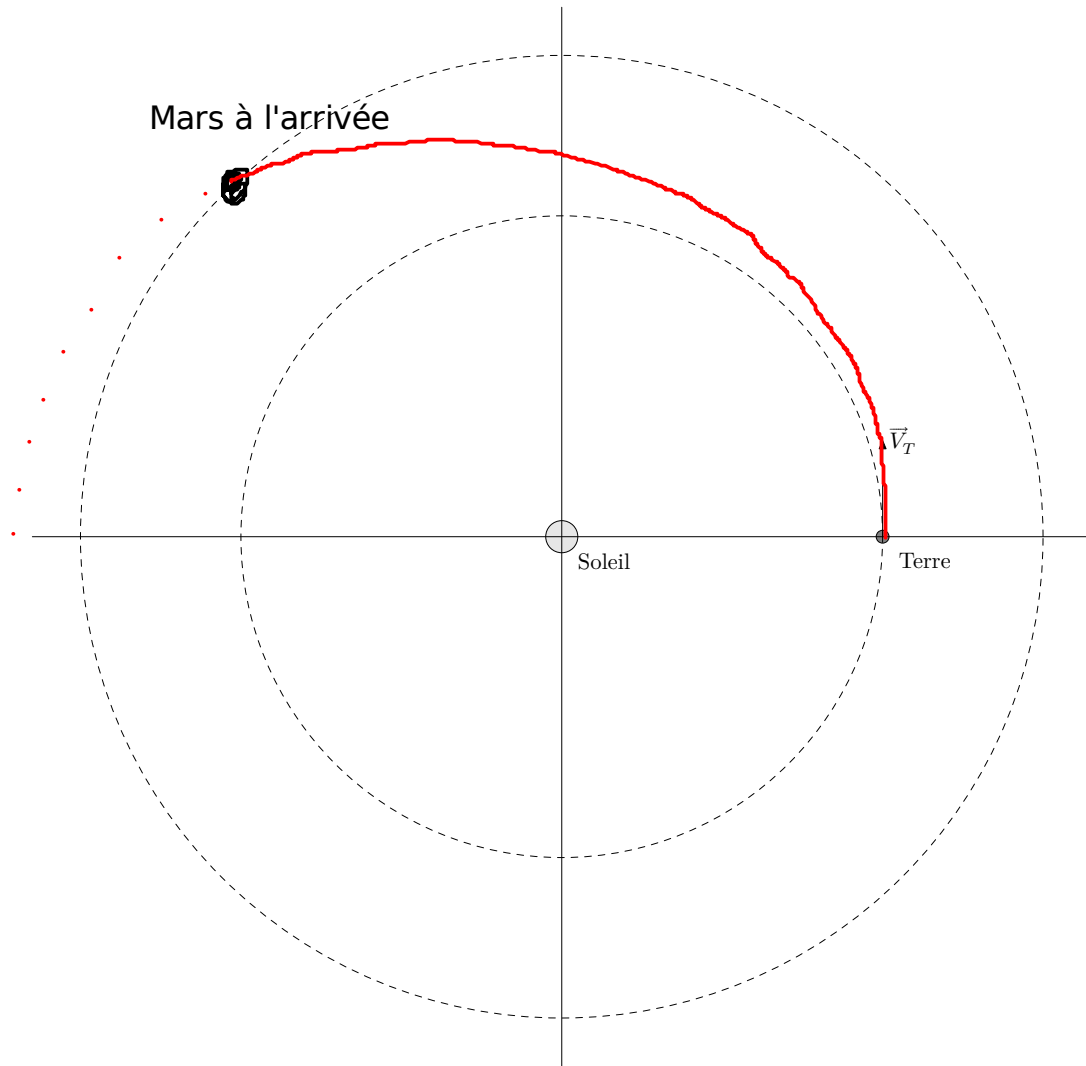


Figure B