

Corrigés : interférences

1. Corrigé : interfrange dans l'eau

Dans l'air assimilé au vide, la différence de marche dans le montage des trous d'Young s'exprime, en reprenant les notations du cours, par $\delta = \ell x/D$. L'ordre d'interférence p est relié à la position par

$$p = \frac{\delta}{\lambda} = \frac{\ell x}{\lambda D} \quad x_p = p \frac{\lambda D}{\ell} .$$

L'interfrange est $i = x_{p+1} - x_p = \lambda D/\ell$. Quand on plonge le dispositif dans l'eau, l'indice prend la valeur n et tous les chemins optiques sont multipliés par ce nombre. La différence de marche et l'ordre sont alors donnés par

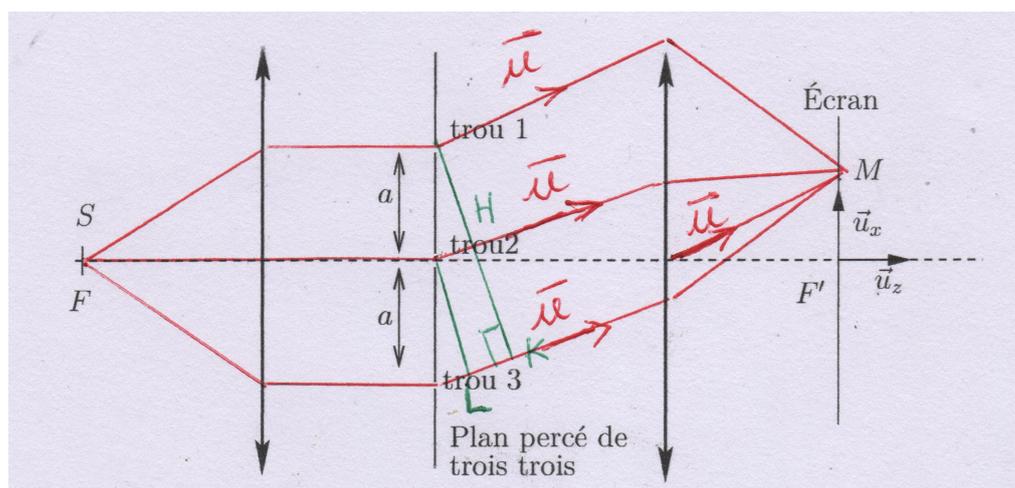
$$\delta' = \frac{n\ell x}{D} \quad p = \frac{n\ell x}{\lambda D} \quad \text{donc} \quad x'_p = p \frac{\lambda D}{n\ell} .$$

Le nouvel interfrange est

$$i' = x'_{p+1} - x'_p = \frac{\lambda D}{n\ell} = \frac{i'}{n} = \frac{3i}{4} = 1,5 \text{ mm} .$$

2. Corrigé : trois trous d'Young alignés

1. Si la lumière traversait les trous en respectant les lois de l'optique géométrique, elle suivrait des rayons rectilignes depuis S et, à droite de chaque trou, seul un cône de sommet S et s'appuyant sur le bord du trou serait éclairé. En pratique, le diamètre ϵ des trous est si petit qu'ils diffractent la lumière; elle s'éparpille donc dans toutes les directions avec une ouverture angulaire de l'ordre de λ/ϵ . Si ϵ est « assez petit », chaque direction dans la zone où on récupère la lumière reçoit autant de lumière que les autres et on peut en pratique considérer la diffraction isotrope.
2. Le point d'observation M se trouve dans le plan focal image; c'est un foyer secondaire image où viennent converger tous les rayons d'un même faisceau parallèle incident sur la lentille. En particulier, le rayon passant par le centre C de la lentille et M n'est pas dévié (ce rayon n'existe pas ici, mais peu importe). Les rayons issus des trous et parvenant en M sont donc parallèles à CM .



3. Les trois rayons sont formés de lumière monochromatique de même longueur d'onde λ . Ils proviennent de la même source (par division du front d'onde), sont donc cohérents et interfèrent. En toute rigueur, il faut encore que leur différence de marche soit inférieure à la longueur de cohérence de la lumière, mais puisqu'elle est supposée monochromatique, la longueur de cohérence est réputée infinie et cette dernière condition, automatiquement satisfaite.
4. Au départ de la source, les trois rayons présentent la même phase $\Psi(S)$. Après la première lentille, les rayons sont parallèles à l'axe optique et, d'après le théorème de Malus, la lumière présente des plans d'onde perpendiculaires à l'axe optique. Les trois trous (notés dans la suite T_1 , T_2 et T_3) se situent dans un même plan d'onde donc ont la même phase : $\Psi(T_1) = \Psi(T_2) = \Psi(T_3)$.

Si la lumière voyageait de droite à gauche depuis M , elle suivrait d'après le principe du retour inverse les mêmes lignes. Les rayons dirigés par $(-\vec{u})$ appartiendraient alors à une même onde plane et, d'après le théorème de Malus,

les points T_1 et H appartiendraient à un même plan d'onde. Il en découle que : $\mathcal{L}_{MT_1} = \mathcal{L}_{MH}$ et bien entendu dans l'autre sens : $\mathcal{L}_{T_1M} = \mathcal{L}_{HM}$.

$$\delta_{12} = \mathcal{L}_{T_1M} - \mathcal{L}_{T_2M} = \mathcal{L}_{T_1M} - (\mathcal{L}_{T_2H} + \mathcal{L}_{HM}) = -T_2H = -\vec{u} \cdot \overrightarrow{T_2T_1} = -\vec{u} \cdot a \vec{u}_x \quad .$$

On remarque que

$$\vec{u} = \frac{\overrightarrow{CM}}{CM} = \frac{f' \vec{u}_z + x \vec{u}_x + y \vec{u}_y}{\sqrt{x^2 + y^2 + f'^2}} \quad .$$

Dans les conditions de Gauss, x et y sont très inférieurs à f' donc

$$\vec{u} \simeq \frac{x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + f' \vec{u}_z}{f'} \quad .$$

Finalement,

$$\delta_{12} = -\frac{ax}{f'} \quad \text{et} \quad \varphi_{12} = \frac{2\pi}{\lambda} \delta_{12} = -\frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \quad .$$

Le rayon passant par T_1 parcourt un chemin optique plus court ; il arrive en avance de phase et φ_{12} est donc négatif avec la convention de signe adoptée dans le cours d'optique.

5. Selon le même raisonnement, on obtient

$$\delta_{32} = T_3L = \frac{ax}{f'} \quad \text{et} \quad \varphi_{32} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax}{f'} \quad .$$

Le rayon 3 arrive en M avec un retard de phase sur le rayon 2. Inversement, le rayon passant par T_2 est en avance sur celui passant par T_3 .

6. Les ondes émises par les trous 1 et 2 sont en interférences constructives si δ_{21} est un multiple de λ :

$$\exists q \in \mathbb{Z}, \frac{ax}{f'} = q\lambda \quad x = q \frac{\lambda f'}{a} \quad .$$

Comme $\delta_{32} = -\delta_{12}$, δ_{32} est aussi, pour les mêmes points, un multiple de λ . Enfin, comme $\delta_{13} = \delta_{12} + \delta_{23} = \delta_{12} - \delta_{21} = 2\delta_{12}$, δ_{13} est aussi un multiple de λ . Il y a donc interférences constructives entre les ondes émises par T_2 et T_3 et entre celles émises par T_1 et T_3 . Finalement, les trois ondes sont en interférences constructives.

7. Ces interférences sont destructives si δ_{21}/λ est demi-entier, c'est à dire si

$$\exists q \in \mathbb{Z}, \frac{ax}{\lambda f'} = q + \frac{1}{2} \quad x = \left(q + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda f'}{a} \quad .$$

Pour ces abscisses,

$$\delta_{31} = 2\delta_{21} = 2 \times \left(q + \frac{1}{2}\right)\lambda = (2q + 1)\lambda \quad .$$

L'ordre d'interférences entre les ondes 3 et 1 est donc un entier, ces deux ondes sont en interférences constructives. Pour ces points particuliers, on a deux paires d'ondes en interférences destructives et une paire en interférences constructives.

8. Par définition de φ_{12} , $\Psi_1(M) = \Psi_2(M) + \varphi_{12}$ et

$$\underline{s}_1(M, t) = s_0 e^{j(\Psi_1(M) - \omega t)} = s_0 e^{j(\Psi_2(M) + \varphi_{12} - \omega t)} = \underline{s}_2(M, t) e^{j\varphi_{12}} \quad .$$

De même,

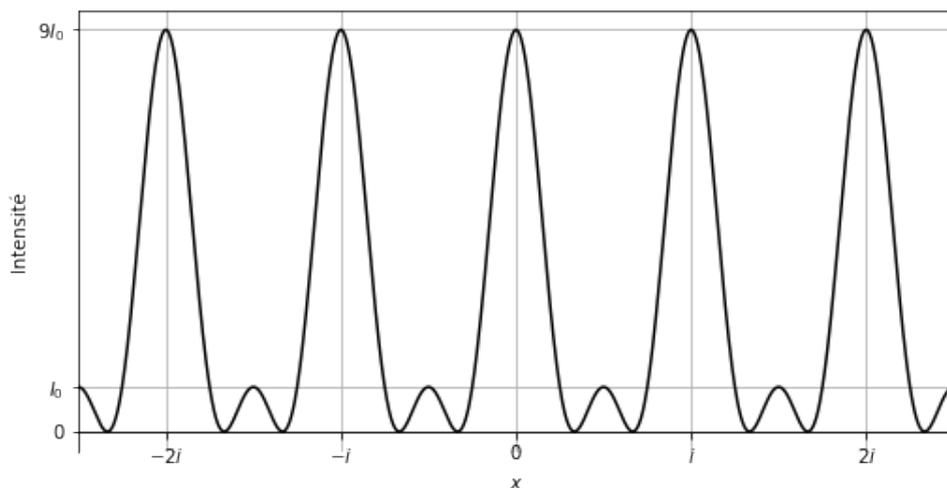
$$\underline{s}_3(M, t) = s_2(M, t) e^{j\varphi_{32}} = \underline{s}_2(M, t) e^{-j\varphi_{12}} \quad .$$

9. Pour ces ondes cohérentes, on additionne les scalaires optiques.

$$\underline{s}(M, t) = \underline{s}_1(M, t) + \underline{s}_2(M, t) + \underline{s}_3(M, t) = \underline{s}_2(M, t) \left(e^{j\varphi_{12}} + 1 + e^{-j\varphi_{12}} \right) \quad .$$

$$\begin{aligned} I(M) &= \frac{1}{2} \underline{s}(M, t) \underline{s}(M, t)^* = \frac{1}{2} \underline{s}_2(M, t) \underline{s}_2(M, t)^* \left(e^{j\varphi_{12}} + 1 + e^{-j\varphi_{12}} \right) \left(e^{-j\varphi_{12}} + 1 + e^{j\varphi_{12}} \right) \\ &= I_0 \left(3 + 2e^{j\varphi_{12}} + 2e^{-j\varphi_{12}} + e^{2j\varphi_{12}} + e^{-2j\varphi_{12}} \right) \quad I_0 = \frac{1}{2} s_0^2 \\ I(M) &= I_0 (3 + 4 \cos \varphi_{12} + 2 \cos(2\varphi_{12})) \\ I(M) &= I_0 \left(3 + 4 \cos \frac{2\pi ax}{\lambda f'} + 2 \cos \frac{8\pi ax}{\lambda f'} \right) \end{aligned}$$

10. La période de I vue comme une fonction de x est $i = \lambda f'/a$.



11. — On a des maximums absolus de valeur $9I_0$ aux abscisses

$$x_{p,\max} = pi \quad .$$

Pour ces positions, les deux cosinus valent 1 ; cela correspond aux interférences constructives entre les trois ondes, comme vu dans la question 6.

— On a des maximums locaux de valeur I_0 aux abscisses

$$x'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right) i \quad .$$

Pour ces positions, le premier cosinus vaut -1 et le second vaut 1 ; cela correspond aux interférences destructives et constructives rencontrées dans la question 7.

— On voit aussi des annulations de I . Grâce à la courbe, on devine que c'est le cas par exemple lorsque $x = i/3$ et, plus généralement, pour

$$x = pi + \frac{i}{3} \quad \text{et} \quad x = pi + \frac{2i}{3} \quad \text{avec} \quad p \in \mathbb{Z} \quad .$$

Pour la première famille d'abscisses,

$$\varphi_{21} = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{a}{f'} \left(p + \frac{1}{3}\right) \frac{\lambda f'}{a} = 2p\pi + \frac{2\pi}{3} \quad .$$

donc

$$I = I_0 \left(3 + 4 \cos \frac{2\pi}{3} + 2 \cos \frac{4\pi}{3}\right) = I_0 \left(3 + 4 \times \frac{-1}{2} + 2 \times \frac{-1}{2}\right) = 0 \quad .$$

Pour la seconde famille, le calcul est à peu près le même.

12. Comme l'intensité lumineuse ne dépend que de x , la figure d'interférences est formée de droites perpendiculaires à (O, \vec{u}_y) . On a des franges très brillantes, des franges lumineuses moins brillantes et des franges noires. Avec un ordinateur, ou bien avec des crayons et un certain talent artistique, on peut produire la figure ci-dessous qui représente l'écran tel qu'on pourrait l'observer à l'œil nu.

