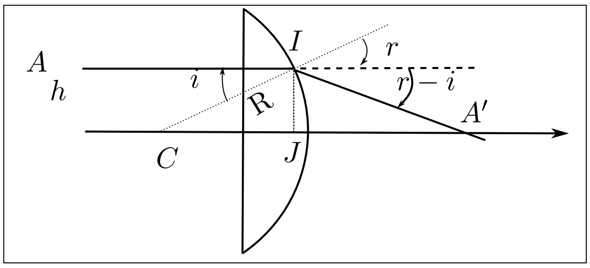
PC* 25 - DEVOIR N^{o} 2

corrigé

Lentille plan-convexe

I.1. D'après la loi de Descartes, $n \sin i = \sin r$.



I.2.

$$\overline{CJ} = R\cos i \qquad \overline{JA'} = \frac{h}{\tan(r-i)} = \frac{R\sin i}{\tan(r-i)}$$

$$\overline{CA'} = \overline{CJ} + \overline{JA'} = R\left(\cos i + \frac{\sin i}{\tan(r-i)}\right)$$

I.3. Dans les conditions de Gauss, les rayons sont peu inclinés et peu éloignés de l'axe optique. Leurs angles d'incidence sur tous les dioptres sont faibles. Dans ce cadre, on peut écrire au premier ordre $\cos i = 1$, $\sin i = i$, $\tan(r-i) = r - i$ et la loi de Descartes devient $ni = r$.

$$\overline{CA'} = R\left(1 + \frac{i}{r-i}\right) = R\left(1 + \frac{i}{ni-i}\right) \qquad \overline{CA'} = \frac{nR}{n-1} \quad .$$

On remarque que dans ces conditions, la longueur $\overline{CA'}$ (et donc la position de A') ne dépendent pas de i et donc ne dépendent pas de h.

I.4. Comme on considère un rayon incident parallèle à l'axe optique, A' est le foyer image.

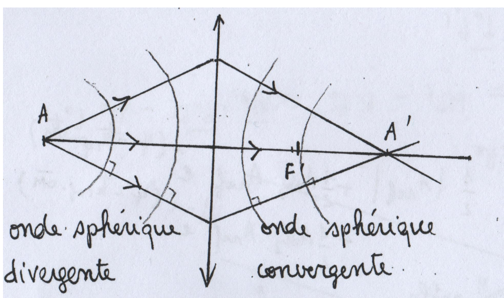
$$f' = \overline{CA'} - R \qquad f' = \frac{R}{n-1} \quad .$$

I.5. Par expérience, on sait que A possède une image A' réelle s'il se trouve à gauche de F, c'est à dire si $\overline{OA} < -f'$. On peut le retrouver facilement à partir de la relation de conjugaison en imposant $\overline{OA} > 0$.

I.6. Attention : d et d' sont des *distances* et non des valeurs algébriques, elles sont positives. $\overline{OA} = -d$ et $\overline{OA'} = d'$. La relation de conjugaison s'écrit

$$\frac{1}{d'} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'} \quad .$$

I.7. On a ici affaire à des ondes sphériques divergente puis convergente.



II.1. Forme vue en cours pour l'onde sphérique divergente $\underline{s}(M,t) = s_0 e^{j(kr-\omega t)}$

II.**2.** Soit α l'angle entre le rayon AM et l'axe optique. On a $\rho = d\tan\alpha$. La condition $\rho \ll d$ signifie que l'angle entre le rayon et l'axe optique est petit ; cela correspond aux conditions de Gauss.

II.**3.** Le théorème de Pythagore donne $r^2 = d^2 + \rho^2$ donc

$$r = d\sqrt{1+\frac{\rho^2}{d^2}} \simeq d\left(1+\frac{\rho^2}{2d^2}\right) \qquad r \simeq d + \frac{\rho^2}{2d} \quad .$$

$$\underline{s}(M,t) \simeq s_0 \exp\left[j\left(kd + \frac{k\rho^2}{2d} - \omega t\right)\right]$$

II.**4.** L'onde passe d'abord en M puis en A' donc $\psi(M) < \psi(A')$.

$$\psi(A') - \psi(M) = kr \qquad \psi(M) = \psi(A') - kr'$$

$$\underline{s}'(M,t) = s'_0 \exp\left[j(\psi(A') - kr' - \omega t)\right]$$

II.**5.** Comme précédemment, $r' \simeq d' + \rho^2/(2d')$ et

$$\underline{s}'(M,t) \simeq s_0 \exp\left[j\left(\psi(A') - kd' - \frac{k\rho^2}{2d'} - \omega t\right)\right]$$

II.**6.** La phase en A' est liée à celle de A et au chemin optique de A vers A'. Or les points A et A' sont conjugués l'un de l'autre par la lentille. D'après le théorème de stigmatisme, le chemin optique de l'un à l'autre est indépendant du rayon lumineux suivi. On peut donc légitimement choisir un rayon particulier pour le calculer.

II.**7.** Conformément à ce qui vient d'être écrit, on considère le rayon qui va de A à A' en suivant l'axe optique. Il parcourt la distance $d + d' - e_0$ dans l'air d'indice 1 et la distance e_0 dans le verre d'indice n. Le chemin optique de A à A' est donc donné par

$$\mathcal{L}_{AA'} = d + d' - e_0 + ne_0 = d + d' + (n-1)e_0 \quad .$$

Comme on a posé $\psi(A) = 0$, on a

$$\psi(A') = \frac{2\pi}{\lambda}\mathcal{L}_{AA'} = k(d + d' + (n-1)e_0) \quad .$$

II.**8.** En reportant dans l'expression de la question II.5, on obtient après simplification du terme en kd' :

$$s'(M,t) \simeq s'_0 \exp\left[j\left(kd + k(n-1)e_0 - \frac{k\rho^2}{2d'} - \omega t\right)\right]$$

C'est l'expression du scalaire optique de l'onde sphérique convergente qui se dirige vers A'.

II.**1.** La lentille est une portion de sphère donc $CH_0 = R$ et $z_1 - z_C = R - e_0$.

II.**2.** Pythagore : $R^2 = \rho^2 + (z_2 - z_C)^2$.

$$(z_2 - z_C)^2 = R^2 - \rho^2 = R^2\left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right)$$

$$z_2 - z_C = R\sqrt{1-\frac{\rho^2}{R^2}} \simeq R\left(1 - \frac{\rho^2}{2R^2}\right)$$

$$z_2 - z_c \simeq R - \frac{\rho^2}{2R^2}$$

II.**3.** $e = z_2 - z_1 = (z_2 - z_C) - (z_1 - z_C)$ donne

$$e = e_0 - \frac{\rho^2}{2R} \quad .$$

II.**4.** Le rayon qui se déplacerait dans l'air devrait parcourir le chemin optique e alors que le rayon qui se déplace dans le verre doit parcourir le chemin ne. L'excédent de chemin parcouru par le rayon qui a traversé le verre est donc

$$\delta = ne - e = (n-1)e$$

ce qui correspond au déphasage

$$\varphi = k\delta = k(n-1)\left(e_0 - \frac{\rho^2}{2R}\right) \quad .$$

II.**5.** Si l'onde venant de A n'avait pas rencontré la lentille, $\underline{s}$ serait donné par l'expression de la question 5. Ici, le rayon doit parcourir en plus le chemin optique δ et sa phase est donc augmentée de φ. On a donc

$$\underline{s}'(M,t) = s_0 \exp\left[j\left(\varphi + kd + \frac{k\rho^2}{2d} - \omega t\right)\right]$$

$$\underline{s}'(M,t) = s_0 \exp\left[j\left(\frac{k\rho^2}{2}\left(\frac{1}{d} - \frac{n-1}{R}\right)\right)\right] \exp\left[(j(kd + k(n-1)e_0 - \omega t)\right]$$

II.**6.** Nous venons d'écrire l'expression de l'onde juste après la traversée de la lentille. Elle s'identifie à celle vue dans la question II.8 à condition que

$$\frac{1}{d} - \frac{n-1}{R} = -\frac{1}{d'} \quad .$$

Autrement dit, on obtient à droite de la lentille une onde sphérique convergente se dirigeant vers le point A' situé à la distance d' définie par cette égalité.

II.**7.** Le point A' vers lequel l'onde converge est l'image de A. La relation qui définit d' peut se réécrire

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{d'} = \frac{n-1}{R} \quad .$$

On reconnaît la relation de conjugaison écrit en I.6. On voit que la focale est donnée par

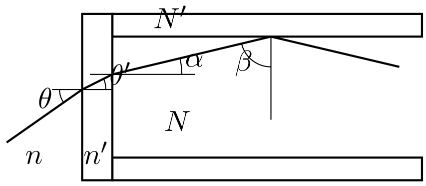
$$\frac{1}{f'} = \frac{n-1}{R} \qquad f' = \frac{R}{n-1} \quad .$$

On a ainsi retrouvé, par une analyse ondulatoire de la lumière, l'expression de la focale établie en I.4 à partir des lois de Descartes.

Gyroscope optique

CCINP

1. a) La loi de Descartes fournit d'abord $n\sin\theta = n'\sin\theta'$ puis $n'\sin\theta' = N\sin\alpha$ donc $n\sin\theta = N\sin\alpha$ de sorte que α de dépend pas de θ.



2. Ce rayon rencontre la gaine d'indice N' avec un angle d'incidence $\beta = \pi/2 - \alpha$. Il y a réflexion totale si $N\sin(\beta) > N'$ c'est à dire si $\sin\beta > N'/N$. Comme $\beta = \pi/2 - \alpha$, cela donne $\cos\alpha > N'/N$. Comme $\sin\theta = N\sin\alpha$ et $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha}$, on a $\sin\theta = N\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ donc l'inégalité précédente s'exprime par

$$\sin\theta < N\sqrt{1 - N'^2/N^2} \qquad \text{i.e.} \quad \sin\theta < \sqrt{N^2 - N'^2} = 1,07 \quad .$$

Puisque la fonction sinus ne dépasse jamais 1, cette condition est satisfaite pour tout θ. Il n'existe pas de valeur limite sur θ.

On peut raisonner par des applications numériques intermédiaires. La réflexion totale a lieu si $\beta > \arcsin(N'/N) = 50,3\,°$, donc si $\alpha < \alpha_{\text{lim}} = 39,7°$. Or l'angle α le plus élevé est obtenu pour $\theta = \pi/2$, il vaut $\alpha_{\max} = \arcsin(1/N) = 36,2°$. Comme $\alpha_{\max} < \alpha_{\text{lim}}$, il y a toujours réflexion totale.

3. a) Les deux rayons effectuent le même parcours jusqu'au plan HM donc $\Delta = r - f - N\,HS$. Comme $HS = r\cos(\pi - \theta) - f = -r\cos\theta - f$, on obtient

$$\boxed{\Delta = r - f + N(f + r\cos\theta) = (N-1)f + r(N\cos\theta + 1)} \quad .$$

b) La condition de stigmatisme se traduit par $\Delta = 0$ c'est à dire

$$\boxed{r = \frac{(1-N)f}{1 + N\cos\theta}} \quad .$$

L'excentricité est $e = N$ et le paramètre $p = (N-1)f$. Comme $N > 1$, il s'agit d'une hyperbole, ou plutôt d'une portion d'hyperbole puisque θ est borné.

c) En plaçant M sur le bord de la fibre, où HM prend sa valeur maximale de $3\,\mu$m, on a $r = HM/\sin(30°) = 6\,\mu$m. Puis on tire f de la relation de la question précédente

$$f = \frac{r(1 + N\cos\theta)}{1 - N} = 4,03\,\mu\text{m}$$

Enfin $(HS)_{\max} = r\cos 30° - f$ donne $(HS)_{\max} = 1,16\,\mu$m.

4. a) $A_0B_1 = L + A_0B_0$ donne $c_1t_1 = L + Vt_1$ d'où

$$t_1 = \frac{L}{c_1 - V} = \frac{L}{c/n - V/n^2} = \frac{nL}{c}\frac{1}{1 - \frac{V}{nc}}$$

b) $A_1B_0 = L - A_1B_1$ donne $c_2t_2 = L - Vt_2$ d'où

$$t_2 = \frac{L}{V + c_2} = \frac{L}{c/n + V/n^2} = \frac{nL}{c}\frac{1}{1 - + \frac{V}{nc}}$$

c)

$$t_1 = \frac{nL}{c} \simeq \frac{nL}{c}(1 + \frac{V}{nc}) \qquad t_2 \simeq \frac{nL}{c}(1 - \frac{V}{nc}) \qquad \boxed{\Delta t \simeq \frac{2VL}{c^2}}$$

$$\phi = \omega\Delta t = \frac{2\pi c}{\lambda_0}\Delta t \quad \boxed{\phi = \frac{4\pi VL}{\lambda_0 c}} \quad .$$

5. a) Placer la séparatrice en O, inclinée selon la bissectrice de $(\widehat{AOB})$.

b) Cette question porte sur la formule de Fresnel dont la démonstration semble attendue. Les deux scalaire optiques à sommer sont en notation complexe $s_1 = s_0e^{j(\Psi_1 - \omega t)}$ et $s_2 = s_0e^{j(\Psi_2 - \omega t)}$ avec $\Psi_2 - \Psi_1 = \phi$. Comme les deux ondes sont cohérentes, on additionne leurs scalaires optiques $s = s_1 + s_2$ puis on calcule l'éclairement (ou intensité) $\mathcal{E} = \frac{1}{2}ss^*$ pour obtenir la relation vue en cours $\mathcal{E} = s_0^2(1 + \cos\phi)$. Presque tous les points de la fibre sont à la distance R du centre et tournent à la vitesse angulaire Ω, ils ont donc pour vitesse $V = R\Omega$, expression que l'on reporte dans celle de ϕ.

$$\Phi = \frac{4\pi R\Omega L}{\lambda_0 c} \qquad \boxed{\mathcal{E} = s_0^2\left[1 + \cos\left(\frac{4\pi LR\Omega}{\lambda_0 c}\right)\right]}$$

c)

$$\left|\frac{d\mathcal{E}}{d\Omega}\right| = s_0^2\frac{4\pi LR}{\lambda_0 c}\left|\sin\left(\frac{4\pi LR\Omega}{\lambda_0 c}\right)\right|$$

On voir bien apparaître le facteur L : la sensibilité est d'autant plus grande que L l'est. Il faut aussi tenir compte du facteur en sinus. La sensibilité est maximale si ce sinus vaut +1 ou -1 *i.e.* si $\phi = \pi/2 + p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, l'éclairement vaut $\mathcal{E}_0 = s_0^2$. Au contraire, la sensibilité s'annule si $\phi = p\pi$ et on peut dire dans ce cas que le gyromètre est aveugle.

d) Dans les conditions optimales, on a $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 = s_0^2$ et

$$d\mathcal{E} = \mathcal{E}_0\frac{4\pi LR}{\lambda_0 c}\,d\Omega \qquad L = \frac{d\mathcal{E}}{\mathcal{E}_0}\frac{\lambda_0 c}{4\pi R}\frac{1}{d\Omega} = 1061\,\text{m}.$$

Pour cette application numérique, attention à bien convertir Ω pour l'exprimer en rad.s^{-1}. Le nombre de tours est donné par $n = L/(2\pi R) = 1,69.10^3$.