Séries à termes positifs

Exercice 1. (*) (Séries de Bertrand)

a. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta > 1$, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{(\ln(n))^{\alpha}}{n^{\beta}}$ est convergente. Pour cela, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann bien choisie.

b. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et tout $\beta \in]0,1[$, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n^{\beta}(\ln(n))^{\alpha}}$ est divergente. La suggestion précédente est reconduite.

c. Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 2} \dfrac{1}{n(\ln(n))^{\alpha}}$. On s'inspirera de la méthode d'étude des séries de Riemann.

Exercice 2. (*) Déterminer la nature des séries dont le terme général suit

$$a_n = 2^{-(\ln(n))^{1/3}}, \qquad b_n = (n+1)^{1/n} - n^{1/n}, \qquad c_n = \tan\left(\frac{1}{n}\right) - \sin\left(\frac{1}{n}\right), \qquad d_n = \frac{n!\ x^n}{n^n}, \qquad e_n = \left(\frac{n+3}{2n+1}\right)^{n\ln(n)}.$$

Pour la première, on comparera le terme général à celui d'une série de Riemann. Pour les deux suivantes, on commencera par trouver un équivalent du terme général.

Exercice 3. Étudier la nature des séries dont les termes généraux suivent. Pour d_n et i_n, calculer la somme.

$$a_n = \frac{3^n}{n} \qquad b_n = \frac{n}{3+\cos(n)} \qquad c_n = \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} \qquad d_n = (\cos(n)+\sin(n))\mathrm{e}^{-n} \qquad e_n = \frac{\sin(n)}{n^{3/2}}$$

$$f_n = \mathrm{e}^{1/n} - \cos(1/n) - \sin(1/n) \qquad g_n = 3^{1/n} - 2^{1/n} \qquad h_n = \left(\frac{n}{2n-1}\right)^n \qquad i_n = \frac{n}{(n+1)!}$$

$$j_n = \frac{1}{\ln(n)\sqrt{n}} \qquad k_n = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}\ \mathrm{d}t \qquad \ell_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^n\ \mathrm{d}t$$

$$m_n = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^n (1-t)\ \mathrm{d}t \qquad p_n = \frac{1}{3^n\, n!} \prod_{k=1}^{n} (3k-2) \qquad q_n = n\, x^{n-1} \qquad r_n = \frac{\binom{2n}{n}}{4^n}$$

Série télescopique

Exercice 4. (**) Soit $s \in \mathbb{R}$. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle strictement positive. On fait l'hypothèse

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{s}{n} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Montrer que la suite de terme général $\ln(n^s\, u_n)$ possède une limite finie. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Exemple : nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} p_n$ dans l'exercice 3.

Séries de référence

Exercice 5. (*) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, déterminer si les sommes suivantes existent et calculer leurs valeurs éventuelles.

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z^{2n-1}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} n^3 \frac{z^n}{n!}.$$

Exercice 6. (*) Pour tout $\alpha > 1$, exprimer $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^{\alpha}}$ et $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{1}{(2k+1)^{\alpha}}$ en fonction de $\zeta(\alpha)$.

Convergence absolue

Exercice 7. (**) On fixe (a,b) dans $\mathbb{R}^2$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

a. Obtenir un développement asymptotique de u_n avec la précision $\mathcal{O}(1/n^2)$.

b. En déduire qu'il existe un unique choix de (a,b) pour lequel la série de terme général u_n est convergente et préciser ce choix.

c. Pour ce choix particulier de (a,b), calculer la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.

Exercice 8. (**) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, le nombre

$$u_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$$

est un entier.

En déduire que la série de terme général $\sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$ converge absolument.

Séries alternées

Exercice 9. (**) Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{(-1)^n}{(n!)^{1/n}}$ est convergente. Est-elle absolument convergente ?

Exercice 10. (*) Soit $\alpha > 0$. Étudier la nature de la série de terme général $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$.

Exercice 11. (**) Étudier la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.

Exercice 12. (**) On considère une fonction f définie sur $]0,+\infty[$, à valeurs réelles, décroissante, convexe, de limite nulle en $+\infty$. Le théorème des séries alternées permet alors de définir une suite réelle $(r_n(f))_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n(f) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k f(k).$$

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver l'égalité $|r_n(f)| = \sum\limits_{p=0}^{+\infty} (f(n+2p+1) - f(n+2p+2))$.

b. En déduire que la suite de terme général $|r_n(f)|$ est décroissante.

c. Montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} r_n(f)$ converge.

d. Pour tout $\alpha > 0$, vérifier que la fonction $f_\alpha : t \mapsto t^{-\alpha}$ est convexe.

Le reste $r_n(f_\alpha)$ est noté $\mathrm{R}_n(\alpha)$ dans la suite.

e. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, simplifier $|\mathrm{R}_n(\alpha)| + |\mathrm{R}_{n-1}(\alpha)|$.

f. En déduire un équivalent simple de $|\mathrm{R}_n(\alpha)|$ quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13. (**) Étudier la nature de la série de terme général $u_n = \sin(\pi\sqrt{n^2+2n})$.

Exercice 14. (***) Montrer que $\cos(1)$ est irrationnel.

Exercices variés

Exercice 15. (**) Soit $\alpha > 0$. Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor\sqrt{n}\rfloor - \lfloor\sqrt{n-1}\rfloor}{n^\alpha}$.

Exercice 16. (***) On fixe un entier n supérieur ou égal à 2.

a. Montrer que la série de terme général $\dfrac{k - n\lfloor\frac{k}{n}\rfloor}{k(k+1)}$ est convergente.

b. Montrer que sa somme vaut $\ln(n)$.

Exercice 17. Transformation d'Abel (**) On considère une suite complexe $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante, de limite nulle.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} z_k$. On suppose que la suite $(\mathrm{S}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier l'égalité $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k\, z_k = \sum\limits_{k=1}^{n} (u_k - u_{k+1})\mathrm{S}_k - u_1\mathrm{S}_0 + u_{n+1}\mathrm{S}_n$.

b. En déduire que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} u_k\, z_k$ est convergente.

c. Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ et tout $\alpha > 0$, montrer que la série $\sum\limits_{k\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}}{k^\alpha}$ converge.

Exercice 18. (**) On considère une suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes strictement positifs. On pose $\mathrm{S}_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

a. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{(\mathrm{S}_n)^2}$ converge. Pour cela, on observera la minoration $(\mathrm{S}_n)^2 \geqslant \mathrm{S}_n\mathrm{S}_{n-1}$.

b. Prouver que la série $\sum \dfrac{u_n}{\mathrm{S}_n}$ a la même nature que la série $\sum u_n$.

Pour le cas de divergence, on séparera le cas où u_n/S_n tend vers 0 et on exploitera l'équivalent $-\ln(1-t) \sim t$ lorsque t tend vers 0.

Exercice 19. (***) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

On suppose que pour toute suite réelle $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum(b_n)^2$ converge, la série $\sum a_n b_n$ converge.

Montrer que la série $\sum(a_n)^2$ converge. (Raisonner par l'absurde au moyen de l'exercice précédent.)

Exercice 20. (**) Soit $(x_n)_{n\geqslant 1}$ une suite réelle vérifiant la relation de récurrence $x_{n+1} = nx_n - n^2$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $y_n = \dfrac{x_n}{(n-1)!}$.

a. Montrer que la suite $(y_n)_{n\geqslant 1}$ converge et exprimer sa limite en fonction de x_1. Cette limite est notée ℓ.

b. Trouver un équivalent simple de $\ell - y_n$ quand n tend vers $+\infty$

c. Obtenir une condition nécessaire et suffisante sur x_1 pour que $x_n = \mathcal{O}(n)$.

Exercice 21. (***) Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles positives. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathrm{A}_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \quad \text{et} \quad \mathrm{B}_n = \sum_{k=0}^{n} b_k.$$

On suppose que la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n$ diverge et que $a_n = \mathrm{o}(b_n)$. Montrer que $\mathrm{A}_n = \mathrm{o}(\mathrm{B}_n)$.
