

# PC\* 25 - DEVOIR N° 3

corrigé

## Objectif pour appareil photo

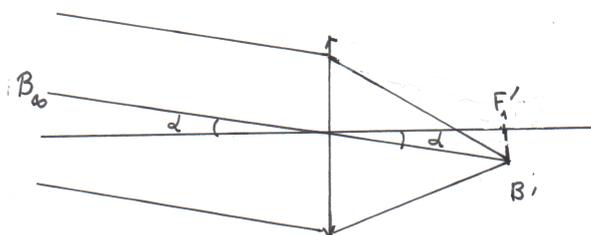
Centrale et CCINP

1. Soit  $N = 18,6 \cdot 10^6$ . L'aire  $a^2$  d'un pixel est l'aire totale divisée par  $N$ , donc

$$a = \sqrt{\frac{\ell h}{N}} = 4,22 \mu\text{m} \quad .$$

2. Il faut placer le capteur au plan focal image de  $L_1$ . Le point  $A_\infty$  dans la direction de l'axe donne une image en  $F'_1$ . Le point  $B_\infty$  dans la direction repérée par l'angle  $\alpha$  donne une image  $B'$  telle que

$$L = f'_1 \tan \alpha \simeq f'_1 \alpha = 0,87 \text{ mm} \quad .$$



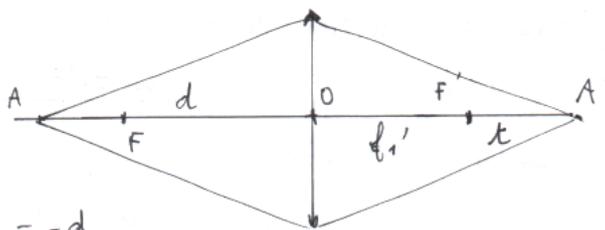
3. Deux points  $B_{1\infty}$  et  $B_{2\infty}$  donnent deux images dont les distances à  $F'_1$  sont  $f'_1 \alpha_1$  et  $f'_1 \alpha_2$ , distance de  $f'_1(\alpha_2 - \alpha_1)$ . À la limite, cet écart vaut  $a$  donc  $f'_1 \alpha_{\min} = a$ .

$$\alpha_{\min} = \frac{a}{f'_1} = 8,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad} = 4,83 \cdot 10^{-3} \text{ }^\circ = 17,4'' \quad .$$

4. Pour un sujet à distance finie, l'image se forme en arrière du foyer. Comme le capteur est fixe, il faut en éloigner l'objectif en le déplaçant vers le sujet.

5. Comme  $\overline{OA} = -d$  et  $\overline{OA'} = f'_1 + t$ , la relation de conjugaison s'écrit

$$\frac{1}{f'_1 + t} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'_1} \quad \text{d'où} \quad t = \frac{f_1'^2}{d - f'_1} \quad .$$



On peut trouver plus rapidement ce résultat avec la relation de Newton. Ici,  $\overline{F'A'} = t$  et  $\overline{FA} = f'_1 - d$

$$\overline{FA} \overline{F'A'} = -f_1'^2 \quad \text{s'écrit} \quad (f'_1 - d)t = -f_1'^2$$

ce qui donne la réponse.

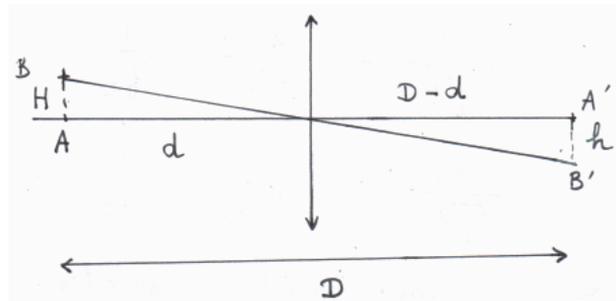
6. — Pour  $d = 100 f'_1$ ,  $t = f'_1/99 = 0,51 \text{ mm}$ .

— Pour  $d = 10 f'_1$ ,  $t = f'_1/9 = 5,1 \text{ mm}$ .

Photographier un objet à la distance  $d = 100 f'_1$  revient presque à le photographier à l'infini. La mise au point mécanique n'est dans ce cas pas nécessaire, le déplacement serait si petit qu'on ne pourrait pas le contrôler.

7. Le théorème de Thalès et la relation de conjugaison d'écrivent

$$\frac{h}{H} = \frac{D - d}{d} \quad \text{et} \quad \frac{1}{D - d} + \frac{1}{d} = \frac{1}{f'} \quad .$$



On en déduit en éliminant  $D$

$$d = f' \left( 1 + \frac{H}{h} \right) = 6,090 \text{ m} \quad \text{puis} \quad D = d \left( 1 + \frac{h}{H} \right) = 6,141 \text{ m} \quad .$$

Ainsi  $D - d = 50,4 \text{ mm}$  (alors que  $f'_1 = 50 \text{ mm}$ ) : le capteur est donc tout proche du foyer, à  $0,4 \text{ mm}$ . En utilisant le résultat de la question 5, on peut d'ailleurs calculer

$$t = \frac{f_1'^2}{d - f_1'} = 0,41 \text{ mm}$$

ce qui confirme ce résultat.

8. Pour l'association de  $L_2$  et de  $L_3$ , on a la série de conjugaison

$$A \xrightarrow{L_2} A' \xrightarrow{L_3} A''$$

auxquelles correspondent les relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A} = \frac{1}{f_2'} \quad \frac{1}{O_3A''} - \frac{1}{O_2A'} = \frac{1}{f_3'} \quad .$$

Comme ces lentilles sont accolées,  $O_2 = O_3$  et en retranchant membre à membre on obtient

$$\frac{1}{O_2A''} - \frac{1}{O_2A} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_3'} \quad .$$

L'image  $A''$  d'un objet  $A$  sur l'axe occupe la même position que celle qui serait donnée par une lentille unique de focale  $f'_{23}$  telle que

$$\frac{1}{f'_{23}} = \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{f_3'} \quad \text{i.e.} \quad f'_{23} = \frac{f_2' f_3'}{f_2' + f_3'} \quad .$$

L'image d'un objet  $AB$  est aussi liée à son grandissement. Pour une lentille unique, on sait qu'il s'exprime par  $\overline{O_2A'}/\overline{O_2A}$ . Pour la succession des deux lentilles,

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A''B''} \overline{A'B'}}{\overline{A'B'} \overline{AB}} = \frac{\overline{O_3A''} \overline{O_2A'}}{\overline{O_3A'} \overline{O_2A}} \quad .$$

Comme  $O_2 = O_3$ ,

$$\frac{\overline{A''B''}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A}} \quad .$$

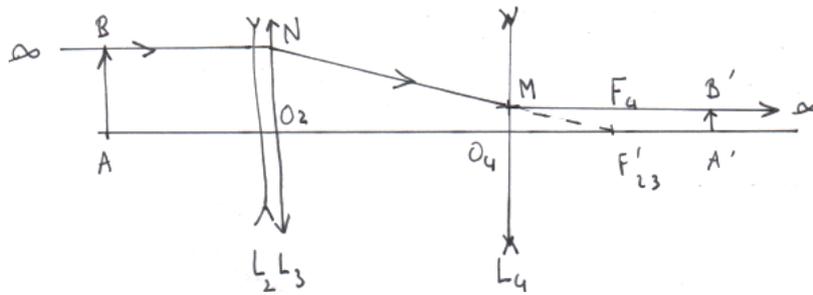
Le grandissement est donc le même que pour une unique lentille de centre  $O_2$ .

Finalement, l'association est deux lentilles est bien équivalent à une lentille unique de focale

$$f'_{23} = \frac{f_2' f_3'}{f_2' + f_3'} = 84 \text{ mm} \quad .$$

Comme  $f'_{23} > 0$ , il s'agit d'une lentille convergente.

9. La lentille équivalente  $L_{23}$  donne d'un objet à l'infini une image dans son plan focal  $F'_{23}$ . Le système est afocal sur  $L_4$  donne de  $F'_{23}$  une image à l'infini, c'est à dire si  $F'_{23} = F_4$ . Dans cette configuration,  $O_2O_4 = f'_{23} - |f'_4| = 24 \text{ mm}$ .



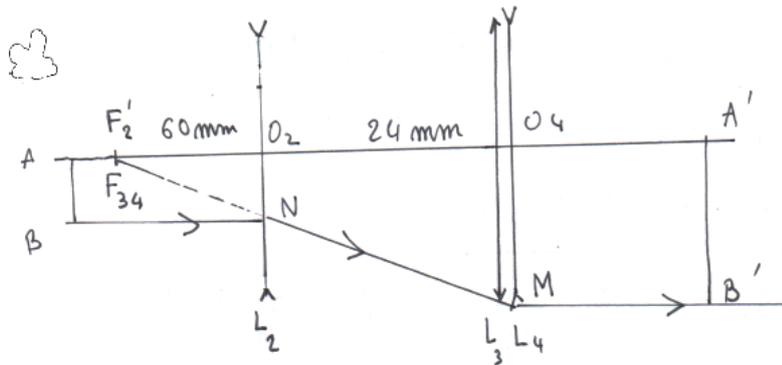
10.

$$G_a = \frac{A'B'}{OA} = \frac{O_4M}{O_2N} = \frac{O_4F'_{23}}{O_2F'_{23}} = \frac{|f'_4|}{f'_{23}} = 0,714 \quad .$$

11. Cette fois, c'est  $\{L_3, L_4\}$  qui est équivalent à une unique lentille de focale  $f'_{34} = f'_{23} = 84$  mm. Comme on a conservé la distance de 24 mm entre  $O_2$  et  $O_3$ , le foyer objet  $F_{34}$  est confondu avec  $F'_2$ .

$$A_\infty \xrightarrow{L_3} F'_2 = F_{34} \xrightarrow{L_4} A'_\infty \quad .$$

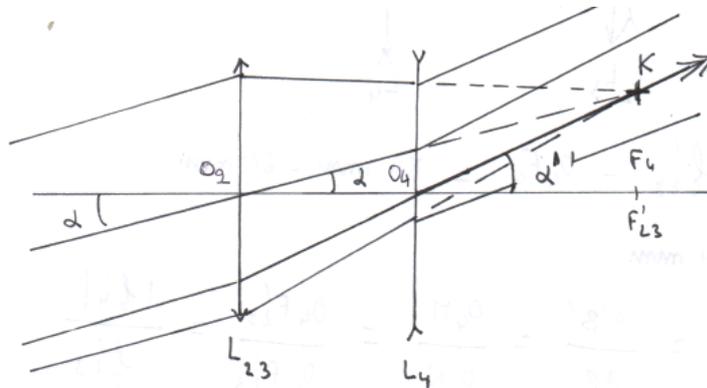
Le système est à nouveau afocal.



$$G_b = \frac{A'B'}{AB} = \frac{O_4M}{O_2N} = \frac{F'_2O_4}{F'_2O_2} = \frac{f'_{23}}{|f'_2|} = \frac{1}{G_a} = 1,4$$

On remarque que la configuration b correspond au retour inverse de la configuration a. Il est donc évident que le second grandissement soit l'inverse du premier.

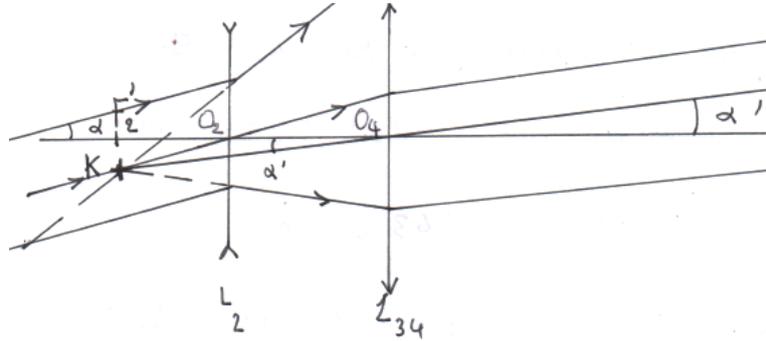
12. Les rayons d'un faisceau collimaté formant l'angle  $\alpha$  avec l'axe optique convergent en K, foyer secondaire image de  $L_{23}$ . Ce point K est aussi un foyer secondaire objet de  $L_4$  donc les rayons émergents sont parallèles entre eux et leur direction est donnée par la droite  $O_4K$ , c'est à dire celle d'un rayon passant par K et le centre de  $L_4$ .



On a d'une part  $F_4K = f_4 \tan \alpha'$  et d'autre part  $F_4K = f'_{23} \tan \alpha$ . Dans la limite des petits angles, on en déduit

$$f_4 \alpha' = f'_{23} \alpha \quad \text{donc} \quad \frac{g_a \alpha'}{\alpha} = \frac{f'_{23}}{f_4} = \frac{1}{G_a} = 1,4 \quad .$$

13. Ayant remarqué que la configuration  $b$  est le retour inverse de la configuration  $a$ , il est évident que  $g_b = 1/g_a$ . Démontrons cependant ce résultat à partir d'une construction. Le faisceau collimaté converge virtuellement au foyer secondaire image  $K$  de la lentille  $L_2$ . Mais  $K$  est aussi un foyer secondaire objet pour  $L_{34}$  donc les rayons émergent tous parallèles à  $KO_4$ .



On a d'une part  $F_2'K = f_2 \tan \alpha$  et d'autre part  $F_2'K = f_{34}' \tan \alpha'$ . Dans la limite des petits angles, on en déduit

$$f_2 \alpha = f_{34}' \alpha' \quad \text{donc} \quad g_b = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f_2}{f_{34}'} = \frac{1}{g_a} = 0,714 \quad .$$

14. Comme l'ensemble  $L_3, L_4, L_4$  est afocal, il donne d'un objet à l'infini une image à l'infini. Au travers de  $L_1$ , on obtient donc une image dans le plan focal. Il faut placer le capteur dans le plan focal de  $L_1$ .

Comme les rayons sont parallèles à droite de  $L_4$ , la distance à laquelle on place  $L_1$  n'intervient pas (pourvu bien sûr qu'elle reçoive les rayons!). Afin de réduire l'encombrement du système, il convient de placer  $L_1$  juste à droite de  $L_4$ , les deux lentilles étant accolées.

15. Comme dans la question 2,  $L_1$  reçoit un faisceau venant de l'infini, mais  $\alpha$  est ici remplacé par  $\alpha' = g\alpha$ . La taille de l'image sur le capteur est donc

$$A'B' = f_1' g \alpha \quad (a) : \quad A'B' = 1,2 \text{ mm} \quad (b) : \quad A'B' = 0,62 \text{ mm} \quad .$$

Attention à bien convertir  $\alpha$  en radians pour ces applications numériques, ou alors calculer  $\tan \alpha$  et régler la calculatrice pour qu'elle interprète l'angle dans la bonne unité.

16. En comparant le résultat de la question précédente à celui de la question 2, on voit qu'il suffit de remplacer  $f_1'$  par  $f_{\text{eq}}' = g f_1'$ . Configuration (a) :  $f_{\text{eq}}' = 70 \text{ mm}$  ; Configuration (b) :  $f_{\text{eq}}' = 35 \text{ mm}$ .

17. La figure montre que  $\tan \alpha = \delta / (2f_1')$  donc

$$2\alpha = 2 \arctan \frac{\delta}{2f_1'} \quad .$$

On calcule  $\delta = \sqrt{\ell^2 + h^2} = 26,8 \text{ mm}$ .

$$L_1 \text{ seule} : 2\alpha = 30^\circ \quad (a) : \quad 2\alpha = 21,7^\circ \quad (b) \quad 2\alpha = 41,8^\circ \quad .$$

Ces angles élevés ne sont pas compatibles avec les conditions de Gauss, ni avec l'approximation  $\tan \alpha \simeq \alpha$ .

18. En déplaçant  $L_3$  de  $L_2$  à  $L_4$ , on fait varier la taille de l'image de 1,2 mm à 0,62 mm, en même temps que le champ angulaire devient plus ouvert. On a donc réalisé un zoom. Je vois plusieurs inconvénients. Tout d'abord, c'est plus encombrant qu'une unique lentille  $L_1$ . Ensuite, on perdra un peu de lumière à chaque réflexion sur les lentilles, d'où une perte de luminosité sur l'image. Enfin, nous avons vu que dans les configurations (a) et (b), le système est afocal. Mais je ne pense pas qu'il le soit pour les positions intermédiaires, où  $L_3$  serait à une distance quelconque entre  $L_2$  et  $L_4$ . Dans ce cas, il faudrait aussi modifier la position du capteur, c'est à dire régler la mise au point.

# Granularité laser

Sujet rédigé par M. Doms

**1.** On parle ici de cohérence spatiale. Cela signifie que les ondes émises par différents points du diffuseur, spatialement distincts, doivent présenter une différence de phase stable de manière à pouvoir produire des interférences. Le diffuseur ne se comporte donc pas du tout comme une source étendue usuelle, dont les différents points sont incohérents.

On parlerait de cohérence temporelle si en un point donné, la phase restait stable au cours du temps, mais ce n'est pas ce dont il s'agit ici.

Un laser présente à la fois une grande cohérence temporelle (ce qui n'est pas crucial ici) et une grande cohérence spatiale. À partir d'un unique point très petit, il peut illuminer une large portion du diffuseur. On pourrait utiliser une source ponctuelle très petite, mais alors le phénomène serait très peu lumineux. La grande intensité du laser est donc aussi un avantage.

**2.** Entre un rayon traversant le diffuseur rugueux au niveau d'un creux et un autre rayon le traversant au niveau d'une bosse, il apparaît une différence de marche  $\delta_{\text{diff}} = (n - 1)\epsilon$  où  $\epsilon$  est la différence d'épaisseur traversée. Cette grandeur varie aléatoirement et peut être estimée par  $(n - 1)\epsilon$ .

**3.** Le déphasage associé est  $\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n - 1)\epsilon$ . La granularité est pleinement développée sur  $\varphi > 2\pi$  c'est à dire si

$$\epsilon > \frac{\lambda}{n - 1} \quad .$$

Avec  $n = 1,5$  et  $\lambda = 0,6 \mu\text{m}$ , la condition est satisfaite si  $\epsilon$  est nettement supérieur à  $1,2 \mu\text{m}$ .

**4.** Émises par le diffuseur avec des phases relatives aléatoires, les  $N$  ondes parviennent en  $M$  avec des phases  $\psi_j(M)$  présentant à nouveau des écarts aléatoires. Le scalaire optique en  $M$  s'écrit

$$s(M, t) = s_1 + s_2 + \dots + s_N \quad \text{avec} \quad s_j = s_0 \exp [i(\psi_j(M) - \omega t)]$$

et l'intensité lumineuse est donnée par

$$I(M) = \frac{1}{2} s s^* = \frac{1}{2} s_0^2 \sum_j e^{i\psi_j} \sum_n e^{-i\psi_n} = \frac{1}{2} s_0^2 \sum_{j,n} e^{i(\psi_j - \psi_n)} \quad .$$

Le facteur  $I_1 = \frac{1}{2} s_0^2$  représente l'intensité émise par un seul élément diffuseur. Dans la double-somme, les termes  $j = n$  valent tous 1 et sont au nombre de  $N$ . On regroupe les autres deux par deux pour obtenir

$$I(M) = I_1 \left( N + \sum_{j,n>j} e^{i(\psi_j - \psi_n)} + e^{i(\psi_n - \psi_j)} \right) = I_1 \left( N + \sum_{j,n>j} 2 \cos(\psi_j - \psi_n) \right)$$

Le terme d'indices  $(j, n)$  de cette somme représente les interférences entre les ondes cohérentes émises par les éléments diffuseurs d'indices  $j$  et  $n$ .

**5.** La somme contient  $N(N - 1)/2$  termes. Ce sont les cosinus de valeurs aléatoires, donc des nombres aléatoires dans  $[-1, 1]$ . Le résultat de leur somme est une valeur aléatoire dont la moyenne sur l'écran vaut zéro. Donc

$$\langle I(M) \rangle = N I_1 \quad .$$

**6.**

$$P_2 M = \sqrt{D^2 + (x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2} \simeq D \left( 1 + \frac{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}{2D^2} \right)$$

$$P_1 M \simeq D \left( 1 + \frac{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2}{2D^2} \right)$$

$$\delta = P_2 M - P_1 M \simeq \frac{1}{2D} ((x_2 + x_1 - 2x)(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1 - 2y)(y_2 - y_1)) \quad .$$

Pour  $y_2 = y_1$ ,  $x_2 = -\ell/2$  et  $x_1 = \ell/2$ , on retrouve l'expression familière  $\delta = \ell x/D$  vue en cours pour les trous d'Young.

7. En remplaçant  $M$  par  $M'$ , on obtient

$$\delta' = P_2M' - P_1M' \simeq \frac{1}{2D} ((x_2 + x_1 - 2x')(x_2 - x_1) + (y_2 + y_1 - 2y')(y_2 - y_1)) \quad .$$

$$\delta' - \delta = \frac{1}{D} ((x_2 - x_1)(x - x') + (y_2 - y_1)(y - y'))$$

La parenthèse est le produit scalaire des vecteurs  $\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1) \vec{u}_x + (y_2 - y_1) \vec{u}_y$  et  $\overrightarrow{M'M} = (x - x') \vec{u}_x + (y - y') \vec{u}_y$ . Comme  $p = \delta/\lambda$ , on obtient finalement

$$p' - p \simeq \frac{\overrightarrow{P_1P_2} \cdot \overrightarrow{M'M}}{\lambda D} \quad .$$

8. Cette variation est maximale si les deux vecteurs sont colinéaires. Au maximum, la distance  $P_1P_2$  vaut  $2R$ .

9. Lorsque  $\overrightarrow{M'M}$  et  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sont colinéaires,  $p' - p = \frac{MM' \times 2R}{\lambda D}$  pour les points  $P_1$  et  $P_2$  les plus éloignés. En passant de  $M$  à  $M'$ , l'intensité varie significativement si l'ordre varie de  $1/2$ , c'est à dire si

$$\frac{MM' \times 2R}{\lambda D} = \frac{1}{2} \quad MM' = \frac{\lambda D}{4R} \quad .$$

Partant de  $M$ , on peut aussi se déplacer de la même distance en sens opposé avec  $p' - p = -1/2$ . Le diamètre des grains sera donc

$$G = 2 \times \frac{\lambda D}{4R} = \frac{\lambda D}{2R} \quad .$$

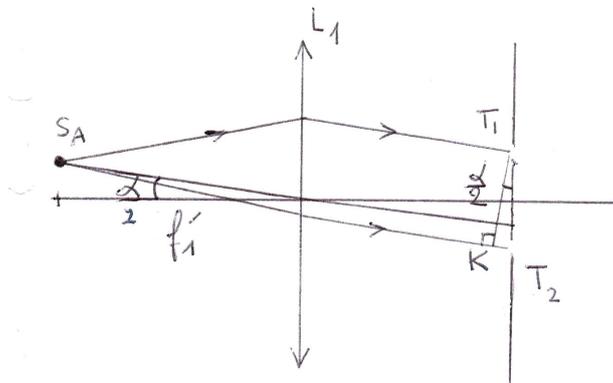
Si on éclaire le diffuseur sur une surface plus étendue,  $R$  augmente donc la taille des grains se réduit. Noter que le facteur  $1/2$  trouvé ici est sans signification, le résultat doit être interprété à un facteur sans dimension près.

## Mesure d'un écart angulaire

Centrale MP 25

**Q 1.** Comme  $S_A$  est dans le plan focal objet de  $L_1$ , les rayons qui en sont issus forment après  $L_1$  une onde plane se propageant dans la direction de  $\overrightarrow{S_A O}$ . Le plan d'onde passant par  $T_1$  intercepte en  $K$  le rayon passant par  $T_2$ . Comme  $T_1$  et  $K$  sont sur un même plan d'onde,  $(S_A T_1) = (S_A K)$  et

$$\delta_{\text{source}} = KT_2 = a \sin \alpha/2 \simeq a\alpha/2 \quad .$$



**Q 2.** Le temps de parcours de  $S_A$  à  $M$  par  $T_1$  est  $\Delta t_1 = (S_A T_1 M)/c$  et

$$s_1(t) = s(t - \Delta t_1) = A_0 \cos(\omega t - \omega \Delta t_1) = A_0 \cos \left[ \omega t - \frac{\omega}{c} (S_A T_1 M) \right] \quad \boxed{s_1(t) = A_0 \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_A T_1 M) \right]} \quad .$$

De même,

$$\boxed{s_2(t) = A_0 \cos \left[ \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_A T_2 M) \right]} \quad .$$

**Q 3.** Posons

$$\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_A T_1 M) \quad \text{et} \quad \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0}(S_A T_2 M) \quad .$$

Les deux ondes issues de la même source sont cohérentes, elles interfèrent et produisent le signal

$$s(M, t) = s_1(t) + s_2(t) = A_0 [\cos(\omega t - \varphi_1) + \cos(\omega t - \varphi_2)] = 2A_0 \cos\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad .$$

À un facteur près, l'intensité est définie par  $I(M) = \langle s(M, t)^2 \rangle$ .

$$I(M) = 4A_0^2 \langle \cos^2\left(\omega t - \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \rangle$$

Le premier facteur en cosinus a pour moyenne 1/2 et le second est constant, donc

$$I(M) = 2A_0^2 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \quad .$$

Notons  $I_0 = A_0^2/2$  l'intensité que produirait seule au point  $M$  l'onde passant par  $T_1$ .

$$I(\delta) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) = 2I_0 [1 + \cos(\varphi_1 - \varphi_2)] \quad .$$

Comme

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \delta_{\text{tot}} = k(\delta + \frac{a\alpha}{2})$$

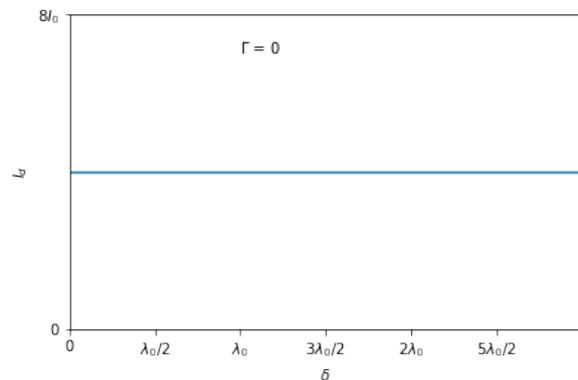
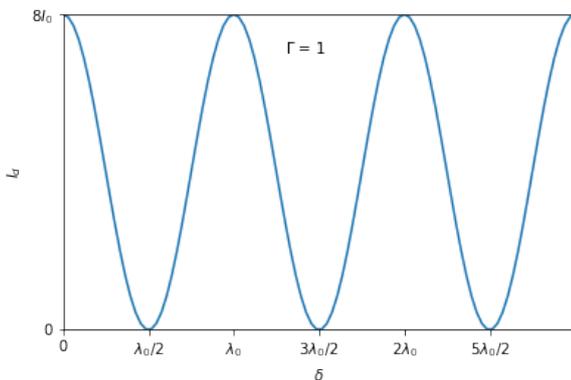
on a finalement

$$\boxed{I(\delta) = 2I_0 [1 + \cos(k(\delta + a\alpha/2))]} \quad .$$

**Q 4.** Les deux sources  $S_A$  et  $S_B$  sont incohérentes donc les ondes issues de  $S_A$  n'interfèrent pas avec celles issues de  $S_B$ . L'intensité en  $M$  s'obtient en ajoutant les intensités que produiraient séparément  $S_A$  d'une part et  $S_B$  d'autre part. L'intensité que produirait  $S_B$  seule se déduit de celle exprimée dans la question précédente en remplaçant  $\alpha$  par  $-\alpha$ .

$$\begin{aligned} I_d(\delta) &= 2I_0 [1 + \cos(k(\delta + a\alpha/2))] + 2I_0 [1 + \cos(k(\delta - a\alpha/2))] \\ &= 4I_0 \left[ 1 + \cos\left(\frac{ka\alpha}{2}\right) \cos(k\delta) \right] \quad . \end{aligned}$$

**Q 5.**



**Q 6.**  $ka/2 = 966,6 \text{ rad}$

**Q 7.** On remarque d'abord que  $X = \frac{ka}{2} = \frac{\pi a}{\lambda_0}$ . Comme les variations relatives de  $\lambda_0$  sont petites, on peut linéariser les variations de  $X$  associées pour écrire

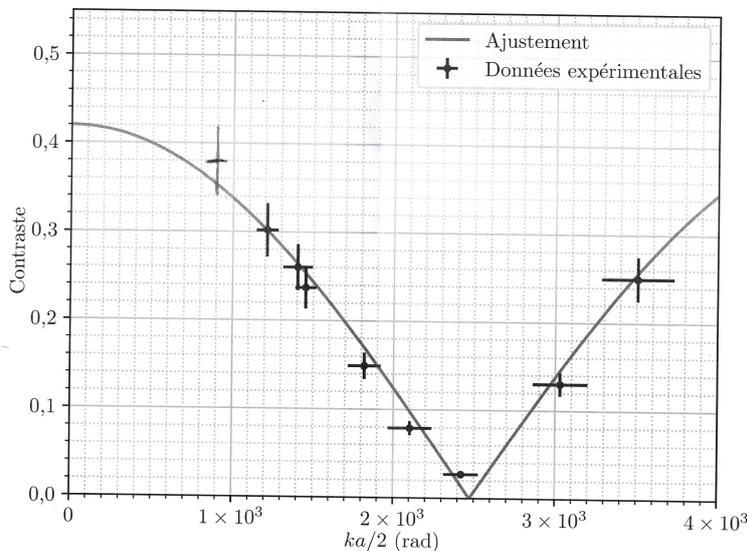
$$u(ka/2) = \pi a \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0^2} = 44,6 \text{ rad} \quad .$$

Il revient au même d'utiliser

$$\frac{u(ka/2)}{ka/2} = \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0} \quad \text{qui donne} \quad u(ka/2) = \frac{ka}{2} \frac{u(\lambda_0)}{\lambda_0} = 966,6 \times \frac{30}{650} = 44,6 \text{ rad} \quad .$$

**Q 8.** Sur la figure 4, on lit  $I_{\max} = 112\text{ua}$  et  $I_{\min} = 50\text{ua}$  d'où on déduit  $C = 0,38$ .

**Q 9.** L'incertitude sur  $C$  est  $u(C) = 0,038$ . J'ai choisi d'utiliser une barre d'erreur possédant une longueur égale à deux fois l'incertitude et centrée sur le point de mesure.



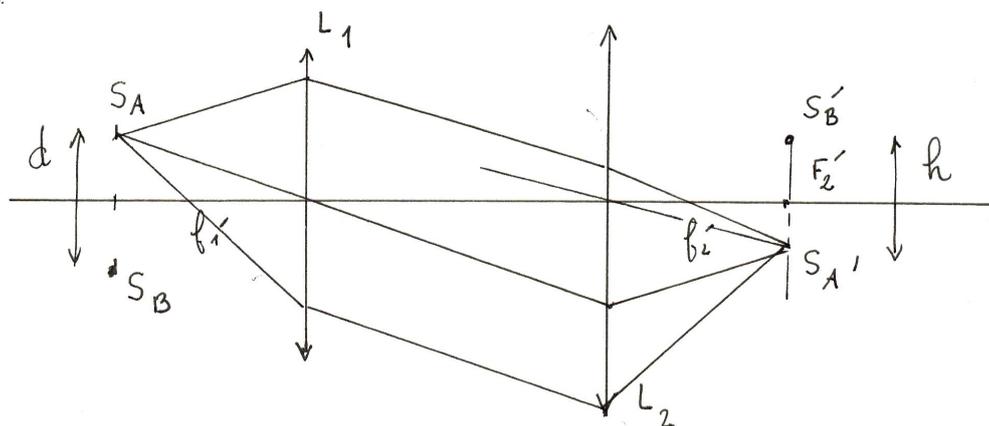
**Q 10.** On peut obtenir les incertitudes sur  $C_0$  et  $\alpha$  en utilisant la méthode de Monte-Carlo. Elle consiste à réaliser de nombreux ajustements de courbes en prenant à chaque fois une série de points fluctuant légèrement autour des points expérimentaux, avec une abscisse et une ordonnée tirées aléatoirement selon des lois de probabilité possédant pour écart-type l'incertitude sur les coordonnées de chacun de ces points.

On obtient ainsi une série de valeurs  $\{C_{0i}\}$  pour  $C_0$  et une série de valeurs  $\{\alpha_i\}$  pour  $\alpha$ . On calcule les écart-types de chacune de ces deux séries et on les interprète comme les incertitudes sur  $C_0$  et  $\alpha$ .

**Q 11.** Comme  $d = f'_1\alpha$ , on obtient

$$d = 508,8 \mu\text{m} \quad u(d) = 8,8 \mu\text{m} \quad .$$

**Q 12.** En l'absence des trous d'Young, l'ensemble des deux lentilles forme sur l'écran les images  $S'_A$  et  $S'_B$  de  $S_A$  et  $S_B$ , symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe optique. Il suffit donc de construire  $S'_A$ .



On a  $h = 2F'_2S'_A = 2f'_2\alpha/2 = f'\alpha$  et  $\alpha = d/f'_1$  donc

$$d = \frac{f'_1}{f'_2} h \quad .$$

Sur la figure 5, on mesure  $h = 32 \mu\text{m}$  et on évalue grossièrement  $u(h) = 4 \mu\text{m}$ . On en déduit

$$d = 457 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad u(d) = 57 \mu\text{m} \quad .$$

Calculons l'écart normalisé entre les deux valeurs  $d_1$  et  $d_2$  de  $d$  obtenues ci-dessous.

$$\text{EN} = \frac{|d_2 - d_1|}{\sqrt{u(d_1)^2 + u(d_2)^2}} = 0,89 \quad .$$

Cet écart normalisé bien inférieur à 2 permet d'affirmer que les deux valeurs sont compatibles.

# Principe de l'holographie

1. a)  $\vec{u}_{\text{ob}} = (0, 0, 1)$  et  $\vec{u}_{\text{ref}} = (\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ .
- b) Une lame de verre homogène et d'épaisseur uniforme introduit une différence de phase uniforme.
- c) Sur la plaque interfèrent deux ondes cohérentes car issues de la même source par division d'amplitude : l'onde objet et l'onde de référence. On peut appliquer directement la formule de Fresnel, mais je réécris ici la démonstration.

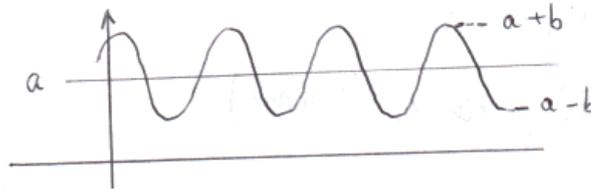
$$\begin{aligned}
 a(M) &= a_{\text{ob}}(M) + a_{\text{ref}}(M) = A_0 e^{i\omega t} \left( e^{-i\varphi_{\text{ob}}(M)} + e^{-i\varphi_{\text{ref}}(M)} \right) \\
 I(M) &= \frac{1}{2} a(M) a^*(M) = \frac{1}{2} A_0 A_0^* \left( e^{-i\varphi_{\text{ob}}} + e^{-i\varphi_{\text{ref}}} \right) \left( e^{i\varphi_{\text{ob}}} + e^{i\varphi_{\text{ref}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_0 A_0^* \left( 1 + 1 + e^{i(\varphi_{\text{ref}} - \varphi_{\text{ob}})} + e^{i(\varphi_{\text{ob}} - \varphi_{\text{ref}})} \right) \\
 &= \frac{1}{2} A_0 A_0^* (2 + 2 \cos(\varphi_{\text{ref}} - \varphi_{\text{ob}})) = A_0 A_0^* (1 + \cos(\Delta\varphi))
 \end{aligned}$$

En posant  $I_0 = A_0 A_0^*$  alors  $I(M) = I_0 (1 + \cos \Delta\varphi)$ .

d)

$$\psi_{\text{ob}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} + \varphi_0 = \varphi_0 \quad \psi_{\text{ref}} = \frac{2\pi}{\lambda_0} \begin{bmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha \quad \Delta\varphi = \phi_0 - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha$$

2.  $t(M) = a + b \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - \phi_0\right)$ . La transmittance est périodique de période  $\lambda_0 / \sin \alpha$ .



3. a) Comme on utilise le même laser que lors de l'enregistrement,

$$a_i(x, y, 0, t) = a_{\text{ref}}(x, y, 0, t) = A_0 \exp \left[ j \left( \omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha \right) \right] .$$

Par la formule d'Euler, on peut écrire la transmittance sous la forme

$$t(x, y) = a + \frac{b}{2} e^{j \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - \varphi_0 \right)} + \frac{b}{2} e^{-j \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - \varphi_0 \right)} .$$

L'onde transmise s'écrit donc

$$a_t(x, y, 0) = t(x, y) a_i(x, y, 0, t) = a A_0 e^{i(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - \varphi_0)} + \frac{b A_0}{2} e^{i(\omega t - \varphi_0)} + \frac{b A_0}{2} e^{i(\omega t - \frac{4\pi}{\lambda_0} x \sin \alpha - \varphi_0)} .$$

- b) L'objet produirait en  $M$  l'onde

$$\underline{a}_{\text{ob}}(x, y, 0, t) = A_0 e^{i(\omega t - \varphi_0)} .$$

Au facteur  $b/2$  près, le second terme de la somme exprimant  $a_t(x, y, 0, t)$  est identique à  $a_{\text{ob}}(x, y, 0, t)$ .

- c) L'onde que recevra l'observateur est identique à celle qui viendrait de l'objet (alors que l'objet est absent). L'observateur verra donc l'objet comme s'il était présent alors qu'il ne l'est plus.