

PC* 25 - DEVOIR N° 4

corrigé

Spectrométrie de la raie rouge de l'hydrogène

Mines-Ponts

□ 1. C'est la face supérieure (1) de la séparatrice qui est semi-réfléchissante. Grâce à la compensatrice, chaque rayon traverse trois épaisseurs de verre ce qui assure la symétrie des deux voies. Sans la compensatrice, le rayon réfléchi par M_m traverserait trois épaisseurs de verre alors que celui réfléchi par M_f en traverserait une seule.

□ 2. L'image M'_m de M_m par réflexion dans la séparatrice est parallèle à M_f . L'interféromètre est donc réglé en lame d'air. Les franges observés sont des anneaux d'égale inclinaison ; on les observe à l'infini, c'est à dire au plan focal image d'une lentille convergente.

□ 3. La division d'amplitude produit deux rayons cohérents et qui interfèrent. Les rayons qui émergent sur l'axe (Oy) ont un angle d'incidence nul sur les miroirs. Ils ont pour différence de marche $\delta = 2vt$. D'après la formule de Fresnel, l'intensité s'exprime par

$$I = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi}{\lambda} vt \right) \right)$$

□ 4.

$$p_1 = \frac{\delta}{\lambda_1} \quad p_2 = \frac{\delta}{\lambda_2} \quad \Delta p = p_2 - p_1 = \delta \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \right) = \delta \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0(\lambda_0 + \delta\lambda)} \simeq \frac{\delta\Delta\lambda}{\lambda_0^2} .$$

Le premier brouillage intervient lorsque $\Delta p = 1/2$. Comme $\delta = 2\Delta x = vt$, on en déduit

$$\Delta x(t_1) = \frac{\lambda_0^2}{4\Delta\lambda} \quad t_1 = \frac{\lambda_0^2}{4v\Delta\lambda} .$$

□ 5. Des rayons de longueur d'onde distinctes n'interfèrent pas, leurs intensités s'ajoutent.

$$I = 2I_1 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_1} \delta \right) \right) + 2I_2 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi}{\lambda_2} \delta \right) \right)$$

$$I(t) = 2(I_1 + I_2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi vt \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)} \cos \left(\frac{4\pi vt}{\lambda_0} + \varphi \right) \right]$$

Pour établir ce résultat, on utilise les formules fournies en annexe, et les approximations

$$\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_2} \simeq \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0^2} \quad \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} \simeq \frac{2}{\lambda_0} \quad \text{et on posé} \quad \tan \varphi = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \tan \left(\frac{2\pi vt \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right) .$$

□ 6. Le terme en \sin^2 présente la période $T_1 = \frac{\lambda_0^2}{2v\Delta\lambda}$ alors que le facteur en cosinus présente la période $T_2 = \frac{\lambda_0}{2v}$. On a $T_1 = T_2 \frac{\lambda_0}{\Delta\lambda}$ donc $T_1 \gg T_2$. L'angle φ présente lui aussi la période T_1 et, comme il varie très lentement, on a pu attribuer une période approximative au facteur en cosinus sans considérer φ . Sur la figure 2, l'abscisse est la différence de marche δ et non pas la date t , mais cela revient au même puisque $\delta = 2vt$. Les périodes deviennent $\Delta_1 = 2vT_1$ et $\Delta_2 = 2vT_2$, avec $\Delta_1 \gg \Delta_2$. Sur la seconde courbe, on voit la période courte Δ_1 , associée à des oscillations rapides. Sur la première courbe, Δ_1 est tellement petit qu'on ne voit plus les oscillations rapides. Par contre, on voit une modulation lente associée à la période Δ_2 .

□ 7. Comme $T_1 \gg T_2$, on peut considérer, sur une durée de quelques fois T_2 , que le facteur en \sin^2 reste presque constante, de même que φ , tandis que le facteur cosinus ondule entre +1 et -1. Localement, on a donc un maximum et un minimum d'intensité

$$I_{\max} = 2(I_1 + I_2) \left[1 + \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi vt \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)} \right]$$

$$I_{\min} = 2(I_1 + I_2) \left[1 - \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi vt \Delta\lambda}{\lambda_0^2} \right)} \right] .$$

Le contraste est donné par

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \quad C = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2} \sin^2 \left(\frac{2\pi vt \Delta \lambda}{\lambda_0^2} \right)}$$

Ce contraste est maximal quand le facteur en \sin^2 vaut 0, et minimal lorsqu'il vaut 1.

$$C_{\max} = 1 \quad C_{\min} = \sqrt{1 - \frac{4I_1 I_2}{(I_1 + I_2)^2}} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2}$$

Le premier minimum du contraste est obtenu pour

$$\frac{2\pi vt \Delta \lambda}{\lambda_0^2} = \frac{\pi}{2} \quad t_1 = \frac{\lambda_0^2}{4v \Delta \lambda} \quad \Delta x(t_1) = \frac{\lambda_0^2}{4 \Delta \lambda}$$

□ 8.

$$\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = \frac{\lambda_0}{4 \Delta x} \quad \boxed{\frac{\Delta \lambda}{\lambda_0} = 1,9 \cdot 10^{-5}}$$

$$C_{\min} = \frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} \quad \text{donne} \quad \frac{I_2}{I_1} = \frac{1 - C_{\min}}{1 + C_{\min}} \quad \boxed{\frac{I_2}{I_1} = 0,74}$$

Épaisseur d'une lame de savon

Q 1. La construction géométrique des rayons fait intervenir l'image S' de la source S dans la séparatrice. En cours, nous avons ensuite construit les images de S par réflexion. Ici, puisque l'énoncé a tracé des axes passant par J , il est plus pratique d'utiliser les images de J .

- J'_2 image de J dans M_2 ;
- J_1 image de J dans M_1 ;
- J_2 image de J'_2 par réflexion dans la séparatrice.

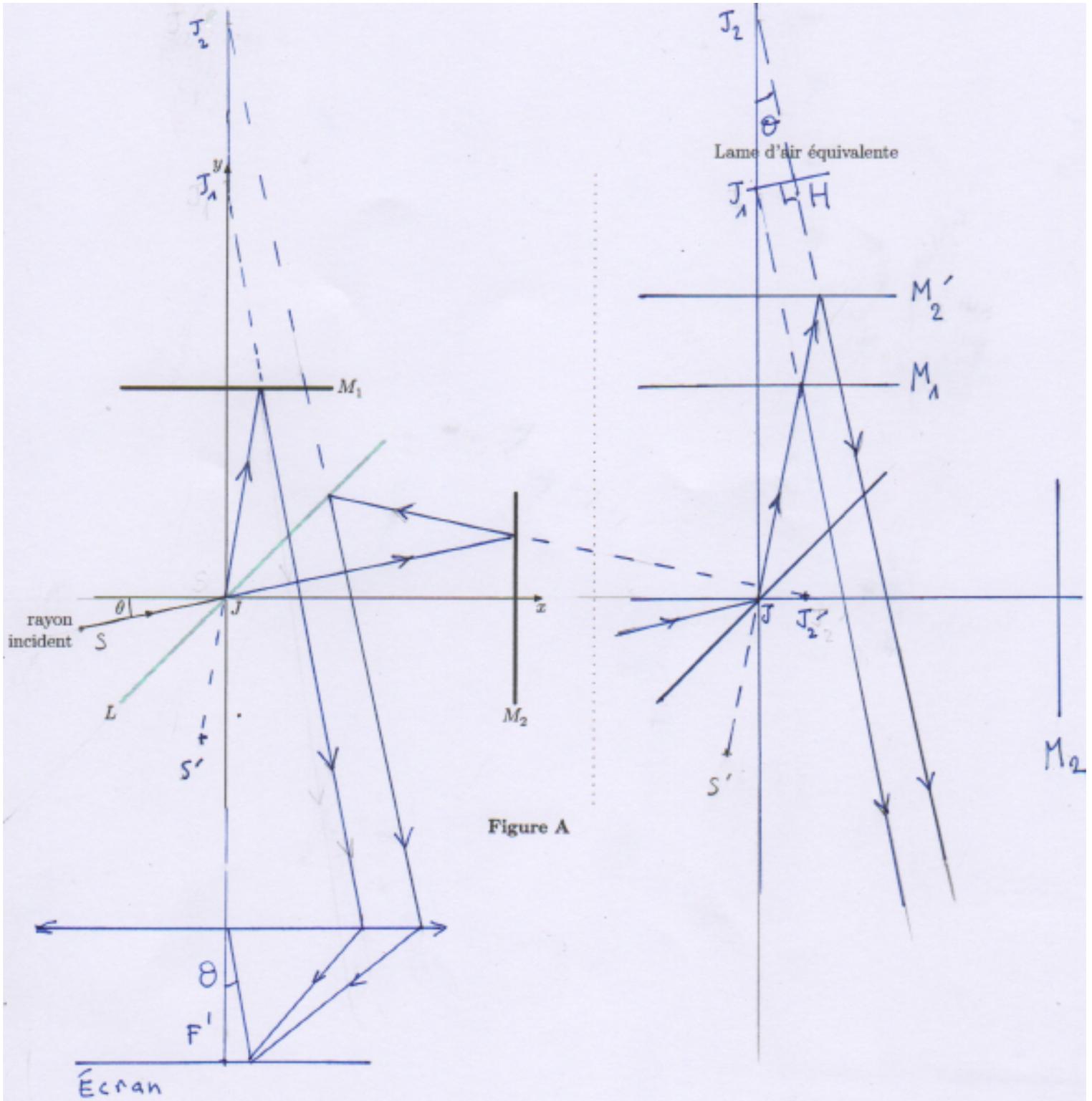
Pour placer J_2 , on doit écrire dans la partie de la feuille prévue pour montrer l'équivalence à une lame d'air. Ce n'est vraiment pas pratique ! Cette équivalence aurait d'ailleurs pu être montrée sur le même schéma, mais l'énoncé demande d'en faire une seconde. Cela oblige à reproduire ce qui se trouve sur le schéma initial. On complète en plaçant le symétrique M'_2 de M_2 par rapport à la séparatrice. Il est fondamental de remarquer que J_2 est aussi l'image de J dans M'_2 . Ainsi, on peut remplacer la rayon réfléchi par M_2 par un rayon virtuel qui se réfléchit en J puis sur M'_2 et émerge en traversant la séparatrice.

Dans le schéma de l'énoncé, les miroirs sont orthogonaux aux axes de coordonnées et la séparatrice est dans leur bissectrice donc M'_2 est parallèle à M_1 . L'interféromètre est équivalent à la lame d'air formée par M_1 et M'_2 .

Q 2. Les deux rayons interfèrent à l'infini (en pratique, dans le plan focal image d'une lentille convergente). Nous avons vu en cours le calcul de la différence de marche. On justifie d'abord que le trajet des rayons à partir de J est le même que si la lumière provenait des sources virtuelles J_1 et J_2 : $\delta = \mathcal{L}_{J_2 M} - \mathcal{L}_{J_1 M}$. Puis on place le plan d'onde associé au retour inverse passant par J_1 (voir figure) et on a $\mathcal{L}_{J_1 M} = \mathcal{L}_{HM}$. Donc $\delta = J_2 H = J_1 J_2 \cos \theta$. Comme $J_1 J_2 = 2e$, $\delta = 2e \cos \theta$.

Q 3. La figure d'interférences est localisée à l'infini. On l'observe au plan focal image d'une lentille convergente (voir schéma). Afin d'obtenir l'image la plus grande possible, on prend $f' = 1$ m. Afin d'observer beaucoup d'anneaux, il convient d'éclairer les miroirs avec un faisceau convergent. Pour cela, on utilise une lentille de courte focale ($f' = 20$ cm) jouant le rôle de condenseur et on l'utilise pour former l'image de la lampe source sur les miroirs.

Q 4. La situation est invariante par rotation autour de la droite ($J_2 J_1 F'$), donc δ présente la même valeur en tous les points d'un même cercle de centre F' . Les franges d'interférences, définies par $\delta = Cste$, sont donc des cercles de centre F' . Plutôt que de cercle, on parle « d'anneaux ». La relation $\delta = Cste$ correspond à $\theta = Cste'$ et comme θ représente l'inclinaison des rayons émergent sur l'axe optique, on parle « d'anneaux d'égale inclinaison ».



Q 5. Pour amener l'appareil au contact optique, il faut translater un miroir dans le sens qui provoque la diminution de e . Expérimentalement, la diminution de e se repère par le fait que chaque anneau rétrécit et que des anneaux sont engloutis au centre. Pour aller au contact optique, on fait « rentrer » les anneaux jusqu'à ce que l'écran soit uniformément éclairé en une teinte plate.

Q 6. Les franges rectilignes sont localisées sur les miroirs (il s'agit d'une surface virtuelle). Pour les observer sur un écran, on forme l'image des miroirs sur l'écran avec une lentille convergente. Autrement dit, on place la lentille et l'écran de manière à satisfaire la relation de conjugaison entre l'objet qu'est le miroir M_1 et l'écran. Pour se placer en incidence quasi-normale comme le dit l'énoncé, mieux vaut placer la source, pas trop étendue, près du foyer objet du condenseur.

Q 7. Je n'aime pas le signe \pm dans l'expression de δ . Prenons une différence de marche algébrique. La frange d'ordre p est définie par

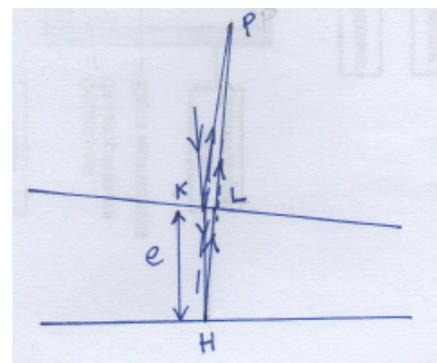
$$\delta = p\lambda \quad 2n\alpha x = p\lambda \quad x_p = p \frac{\lambda}{2n\alpha}$$

d'où l'interfrange $i = x_{p+1} - x_p = \lambda/(2n\alpha)$. Si α diminue, les franges s'élargissent. À la limite $\alpha \rightarrow 0$, on retrouve une teinte plate.

Q 8. La situation est analogue à celle de l'interféromètre de Michelson monté en coin d'air, à ceci près que l'on a ici affaire à un coin d'eau d'indice n . Le dioptre air/eau a pour analogue le miroir M_1 et le dioptre eau/air a pour analogue le miroir M'_2 . Dans le cas du Michelson, le programme prévoit que l'expression de la différence de marche soit admise; elle résulte d'approximations délicates. C'est pour cela que l'énoncé nous a fourni l'expression de δ dans la question 7. Il est donc très étrange que l'on nous demande ici de justifier l'expression de δ .

On peut justement répondre par analogie de le Michelson en coin d'air formé par M_1 et M'_2 . On remarque que $\alpha x \simeq \tan \alpha x$ représente l'épaisseur locale du coin d'air, l'expression fournie en Q7 s'écrit donc $\delta = \pm 2ne$. L'énoncé en Q6 a précisé que ce résultat est valable en incidence quasi-normale. Par analogie, on peut admettre que dans le cas de la figure 5, la différence de marche est $2ne$.

Pour répondre sans utiliser l'analogie, on s'appuie sur une figure. En incidence quasi-normale, θ et θ_r sont très proches de 0. De plus, l'angle entre les deux dioptres est très faible (je crois que l'énoncé a oublié cette hypothèses), donc l'incidente sur le dioptre inférieur est aussi quasi-normale et le rayon ressort quasiment vertical. Les points K et L sont très proches et $KP \simeq LP$. La différence de marche est donc le trajet $\mathcal{L}_{KHP} \simeq 2ne$ (ici n est l'indice de l'eau).



La réflexion en K se fait sur un milieu plus réfringent, ce qui augmente le déphasage de π . On a donc

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\delta + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \times 2ne + \pi = \frac{2\pi}{\lambda} \left(2ne + \frac{\lambda}{2} \right) .$$

Q 9. La frange d'ordre p est définie par $\Delta\Phi = 2p\pi$, ce qui conduit à

$$e_p = \frac{\lambda}{2n} \left(p - \frac{1}{2} \right)$$

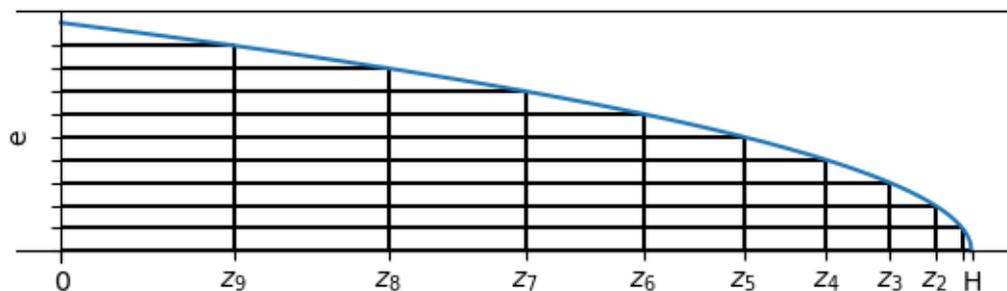
Entre deux franges, l'épaisseur varie de $\Delta e = \lambda/(2n)$. Si la lame était un coin d'angle constant, e varierait avec z sous la forme $e = e_0 + \alpha z$ et les franges auraient pour cote

$$z_p = \frac{\lambda}{2n\alpha} \left(p - \frac{1}{2} \right) - \frac{e_0}{\alpha} .$$

Les franges seraient équidistantes, d'interfrange $\lambda/(2n\alpha)$. Cette affirmation est en contradiction avec ce qu'on observe sur la figure 6 où les franges sont plus serrées en bas et plus espacées en haut. La lame d'eau n'est donc pas assimilable à un coin d'angle constant. Comme e varie d'une quantité fixée entre deux franges, la figure montre que les variations de e avec z sont plus rapides au bas de la lame et plus lentes en haut de la lame.

Q 10. La manière la plus simple de répondre à cette question s'appuie sur un graphique. L'épaisseur e varie proportionnellement à $\sqrt{H-z}$ et ces variations sont représentées par une courbe tournant sa concavité vers

le bas. Les franges sont définies par des valeurs e_p équidistantes ; en relevant les valeurs de z correspondantes, on obtient les cotes z_p de ces franges. À cause de la concavité de la fonction, qui varie plus vite près de $z = H$ que près de $z = 0$, on voit que ces franges seraient plus serrées en haut et plus espacées en bas. Cela est manifestement contradictoire avec la photographie de la figure 6. L'expression proposée doit être rejetée.



Il est bien sûr possible d'exprimer la cote z_p de la frange d'ordre p en résolvant $\Delta\phi = 2p\pi$, mais cette explication ne me paraît pas plus convaincante que le graphique. On obtient

$$z_p = H - \left(p - \frac{1}{2}\right)^2 \frac{\lambda^2 \rho g t}{4n^2 2\eta} .$$

Les ordres les plus élevés se trouvent en bas de la lame, là où elle est la plus épaisse. En parcourant la lame de haut en bas, p augmente et à cause du carré portant sur le facteur $(p - 1)$, les franges ne sont pas équidistantes, mais de plus en éloignées. Cette affirmation est contradictoire avec la figure 6.

Q 11. La frange d'ordre p est définie par $e_p = (p - 1/2)\lambda/(2n)$ ce qui, avec $e = K(H - z)^\beta$, conduit à

$$K(H - z)^\beta = \frac{\lambda}{2n} \left(p - \frac{1}{2}\right)$$

$$\ln\left(p - \frac{1}{2}\right) = \beta \ln(H - z) - \ln\left(\frac{\lambda}{2nK}\right) .$$

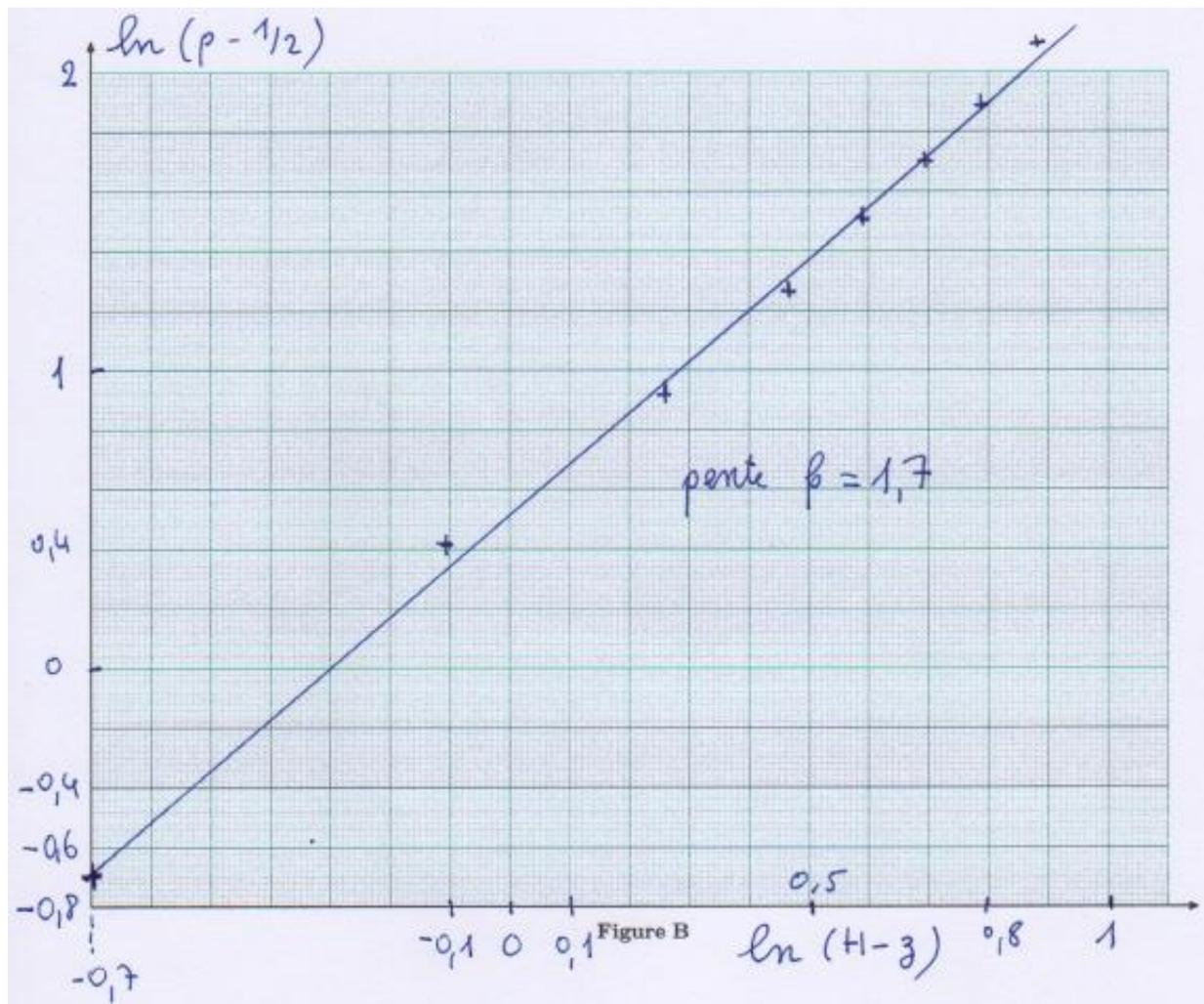
Le graphe de la fonction

$$\ln(H - z) \mapsto \ln\left(p - \frac{1}{2}\right)$$

est donc une droite de pente β . À partir du tableau de valeurs fourni, on calcule $\ln(H - z)$ et $\ln(p - 1/2)$. On admet que le « numéro » de la frange est identique à son ordre, ce qui est vrai si on a bien compté toutes les franges depuis le haut.

p	1	2	3	4	5	6	7	8
$\ln(H - z)$	-0,7	-0,11	0,26	0,47	0,59	0,69	0,79	0,88
$\ln(p - 1/2)$	-0,7	0,41	0,92	1,25	1,5	1,7	1,9	2, 1

On reporte ces points sur le quadrillage millimétré fourni. Aux erreurs de mesure près, les points s'alignent sur une droite dont la pente est β . On obtient $\beta = 1,7$.



Franges sous une goutte caléfiée

On observe des franges inscrites dans un disque qui est l'image de la surface inférieure de la goutte ou du film de vapeur qui la porte. C'est sur cette surface que l'appareil photo est mis au point. Les franges observées sont des franges d'égale épaisseur associées à la différence de marche $\delta = 2e$ entre un rayon réfléchi par l'interface liquide-vapeur et un autre réfléchi par l'interface saphir-vapeur. La situation rappelle celle de l'interféromètre de Michelson monté en coin d'air. Les franges dessinent des lignes de niveau du film de vapeur. En notant p l'ordre d'interférence,

$$\delta = p\lambda \quad e = p\lambda/2 \quad \Delta e = \Delta p \lambda/2 \quad .$$

Entre deux franges successives, p varie de 1 et e varie de $\lambda/2$. En comptant les franges, on accède donc aux variations de e , mais on ne connaît cette épaisseur qu'à une constante additive près. En s'appuyant sur la figure 1, on suppose que le point C correspond à un maximum de e . Nous posons par convention $e(B) = 0$ et $x_B = 0$. Les valeurs de x s'obtiennent par mesure à la règle sur la photo et par proportion avec $BD = 880 \mu\text{m}$. Les variations de p sont comptées à partir de p_B en dénombrant les franges sombres et brillantes. On obtient le tableau de valeurs et la courbe ci-dessous avec quelques valeurs particulières :

$$\Delta e_{BC} = 4 \times \frac{\lambda}{2} = 1,27 \mu\text{m} \quad \Delta e_{CD} = -16 \times \frac{\lambda}{2} = -5,06 \mu\text{m}$$

Dans ces relevés, l'incertitude est de l'ordre d'un quart de frange d'où une erreur maximale $\lambda/8 = 0,08 \mu\text{m}$.

Près de D , la frange brillante se referme sur elle-même ce qui montre que e réaugmente près du bord. Près de B la situation est moins claire. À cause du dessin de la figure 1, je pense qu'on a aussi une remontée de e près du bord.

x_{photo} (mm)	0	3	6	8	10	11.5	13	14.5	17	19.5	26	33	35	37.5	39	42
Δp	0	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4.	3.5	3	2.5	2	1
x_{photo} (mm)	44	47	48.5	50.5	52.5	54	56	57.5	59	60.5	62	64	66	69	71.5	
Δp	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-12.5	-12	

