PC* — mathématiques **jeudi 3 octobre 2025**
Devoir surveillé n° 1 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Questions de cours et de calcul

Question 1. Étudier la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \dfrac{1}{n^{2/3}\ln(n)}$.

Question 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}k^2 = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Question 3. Soit $x \in]0, +\infty[$. Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 0} n!\, x^{n^2}$. On pourra utiliser la règle de d'Alembert.

Question 4. Donner la définition d'un espace vectoriel de dimension finie puis de la dimension d'un tel espace.

Question 5. On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et on considère le vecteur $a = (2, -1, 3)$.

Déterminer la matrice canoniquement associée à la symétrie orthogonale d'axe $\mathrm{Vect}(a)$.

Question 6. Soit $(\Omega, \mathbb{P})$ un espace probabilisé fini. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathbb{P})$ suivant la loi binomiale de paramètres n et p.

a. Rappeler en formules en quoi consiste cette loi.

b. Décrire un cas typique d'expérience dans laquelle une grandeur est modélisée par une variable aléatoire de même loi que X.

Problème 1

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\mathrm{H}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \quad u_n = \mathrm{H}_n - \ln(n), \quad \mathrm{T}_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}, \quad a_n = \mathrm{T}_n - \frac{(\ln(n))^2}{2}, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{\ln(k)}{k}.$$

Question 7. À l'aide d'une série télescopique, montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ.

Question 8. Montrer que $a_n - a_{n-1}$ est équivalent à $-\dfrac{\ln(n)}{2n^2}$ et en déduire que la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée δ.

Question 9. Montrer que la série $\sum_{k\geqslant 1} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$ converge.

Question 10. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité

$$\mathrm{S}_{2n} = \ln(2) \times \mathrm{H}_n + \mathrm{T}_n - \mathrm{T}_{2n}.$$

Question 11. En déduire une expression de S_{2n} en fonction de a_n, de a_{2n} et de u_n.

Question 12. Déterminer la valeur de $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \dfrac{\ln(k)}{k}$.

Problème 2

On définit une fonction $f : [1, +\infty[\to \mathbb{C}$ par $f(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(t)}}{t}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \exp(\mathrm{i}\ln(n))$ et

$$d_n = f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Question 13. Justifier que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ diverge. On pourra considérer le quotient u_{2n}/u_n et raisonner par l'absurde.

Question 14. Pour tout $t \geqslant 1$, calculer $f'(t)$ puis $|f'(t)|$.

Question 15. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $t \in [n, n+1]$, justifier la majoration $|f(n) - f(t)| \leqslant \dfrac{\sqrt{2}}{n^2}$.

Question 16. En déduire que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} d_n$ converge.

Question 17. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\ln(n)}}{n}$.

Problème 3

On fixe un entier n strictement positif. On note $\mathcal{E}_n = (1, \mathrm{X}, \ldots, \mathrm{X}^n)$ la base canonique du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Soient a et b deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $a < b$. On se donne une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue et strictement positive.

Pour tout couple (P, Q) d'éléments de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$, on pose

$$(\mathrm{P}|\mathrm{Q}) = \int_a^b \mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)f(t)\ \mathrm{d}t.$$

Question 18. Justifier que $(\ |\ )$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$.

Question 19. On applique le procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt à la base $\mathcal{E}_n$ pour obtenir une base orthogonale $\mathcal{B}_n = (\mathrm{P}_0, \ldots, \mathrm{P}_n)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ constituée de polynômes unitaires (au sens des polynômes : leur coefficient dominant vaut 1).

Rappeler en quoi consiste ce procédé — en particulier, on donnera les formules qui définissent ces polynômes.

Le but des quatre prochaines questions est de prouver que le polynôme P_n possède n racines dans l'intervalle $]a, b[$.

Question 20. Soit Q un polynôme réel non nul. On suppose que la fonction associée à Q n'est pas de signe constant sur $[a, b]$.

Montrer alors que Q possède au moins une racine dans $]a, b[$ dont l'ordre de multiplicité est impair. On pourra raisonner par l'absurde.

Question 21. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \mathrm{P}_n(t)f(t)\ \mathrm{d}t$ est nulle et en déduire que P_n n'est pas de signe constant sur le segment $[a, b]$.

Question 22. On note s le nombre de racines de P_n dans $]a, b[$ qui ont un ordre de multiplicité impair. On note ces racines $x_1, \ldots, x_s$ et leur multiplicités sont notées respectivement $m_1, \ldots, m_s$.

On fait l'hypothèse $s < n$ et on pose $\mathrm{A} = \displaystyle\prod_{k=1}^{s} (\mathrm{X} - x_k)$.

Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{A}(t)\mathrm{P}_n(t)$ est de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$ et justifier l'égalité $(\mathrm{A}|\mathrm{P}_n) = 0$ puis en déduire une contradiction.

Question 23. Conclure.

Question 24. Dans cette question, on suppose que n est supérieur ou égal à 2.

Montrer l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\mathrm{XP}_{n-1} = \mathrm{P}_n + a_n\mathrm{P}_{n-1} + b_n\mathrm{P}_{n-2}$.
