Corrigés : transferts thermiques

1. Explosion dans un réacteur chimique

1. La température dépend de la seule variable spatiale x, donc $\vec{j}(x,t)$ est dirigé selon $\vec{u}_x$. Il s'agit d'un problème à une dimension et on peut reproduire la démonstration du cours. Elle consiste à appliquer le premier principe à une tranche de réacteur de section S et comprise entre les abscisses x et $x + dx$. On n'oublie pas le terme source $\delta Q_{\text{source}} = p(x,t)Sdx$ et on obtient

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{\rho c}{\lambda}\frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{p}{\lambda} \quad .$$

2. Pour la fonction T, proposée, on a

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = -k^2 T_1 \cos(kx-\varphi)\exp(-t/\tau) \qquad \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{1}{\tau}T_1\cos(kx-\varphi)\exp(-t/\tau) \quad .$$

Cette fonction est solution de l'équation trouvée à la première question si

$$-k^2T_1\cos(kx-\varphi)\exp(-t/\tau) + \frac{\rho c}{\lambda}\frac{1}{\tau}T_1\cos(kx-\varphi)\exp(-t/\tau) = -\frac{A}{\lambda}T_1\cos(kx-\varphi)\exp(-t/\tau)$$

c'est à dire si

$$-k^2 + \frac{\rho c}{\lambda\tau} = -\frac{A}{\lambda} \qquad \text{ou encore} \qquad \frac{\rho c}{\tau} = \lambda k^2 - A \quad .$$

3. Le fait que les extrémités soient calorifugées signifie que le flux thermique qui les traverse est nul. L'énoncé n'a pas précisé l'origine des abscisses. Disons que l'extrémité gauche se trouve à l'abscisse 0 et l'extrémité droite à l'abscisse $x = \ell$. On a donc

$$\forall t, \quad j(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad j(\ell,t) = 0 \quad .$$

À cause de la loi de Fourier, on en déduit

$$\forall t, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial T}{\partial x}(\ell,t) = 0 \quad .$$

4. On a

$$\frac{\partial t}{\partial x} = -kT_1\sin(kx-\varphi)\exp(-t/\tau)$$

L'annulation de la dérivée en 0 donne

$$-kT_1\sin\varphi)\exp(-t/\tau) = 0 \quad \text{donc} \quad \sin\varphi = 0 \quad .$$

Les solutions pour φ sont tous les multiples de π, mais cette multiplicité de solutions est sans intérêt. En effet, augmenter φ de 2π ne change rien à la fonction T, et l'augmenter de π revient à changer le signe de T_1. On peut donc choisir $\varphi = 0$

L'annulation de la dérivée en ℓ s'écrit

$$-kT_1\sin(k\ell)e^{-t/\tau} = 0 \quad \text{donc} \quad \sin k\ell = 0 \qquad k = n\frac{\pi}{\ell} \quad \text{avec} k \in \mathbb{N} \quad .$$

5. À partir du résultat de la question 2, et en éliminant k, on trouve

$$\tau = \frac{\rho c}{\lambda n^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} - A} \quad .$$

Si $\tau > 0$, $\exp(-t/\tau)$ tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini, donc pour tout x, la température tend vers 0. Au contraire, la température va diverger si $\tau < 0$, c'est à dire si

$$A > \lambda n^2 \frac{\pi^2}{\ell^2} \quad .$$

La valeur la plus facile à dépasser est associée à $n = 1$. Le réacteur explose si

$$A > \lambda\frac{\pi^2}{\ell^2} \quad i.e. \qquad \boxed{\ell > \pi\sqrt{\frac{\lambda}{A}}} \quad .$$