

Exercice 1. (*) Soit (F, N) un espace vectoriel normé. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel.

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que u est injective.

Montrer que la fonction $N_u : x \mapsto N(u(x))$ est une norme sur E .

Exercice 2. (*) Pour tout $x = (x_1, x_2)$ de \mathbb{R}^2 , on pose $M(x) = \max(|x_1|, |x_1 + x_2|)$.

a. Montrer que M est une norme sur \mathbb{R}^2 .

b. Dessiner la boule unité fermée de M .

c. Pour tout $x \in \mathbb{R}^2$, justifier les inégalités

$$M(x) \leq \sqrt{2} \times N_2(x) \quad \text{et} \quad N_2(x) \leq \sqrt{5} \times M(x)$$

puis prouver que les constantes $\sqrt{2}$ et $\sqrt{5}$ sont optimales.

Exercice 3. (*) Pour tout polynôme réel P , écrit sous la forme $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$\|P\| = \sup_{0 \leq x \leq 1/2} |P(x)| \quad \text{et} \quad N(P) = \left| \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

a. Prouver que $\|\cdot\|$ et N sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.

b. Montrer que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ et vers 1 pour la norme N .

c. Construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme X .

d. (***) Pour tout polynôme P non nul de $\mathbb{R}[X]$, construire une norme sur $\mathbb{R}[X]$ pour laquelle la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme P .

Exercice 4. ()** Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$, on pose

$$\|A\| = \max_{1 \leq k \leq n} \sum_{\ell=1}^p |a_{k,\ell}|.$$

a. Vérifier que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Reconnaitre cette norme dans le cas $p = 1$.

b. Pour toute matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ et toute matrice B de $\mathcal{M}_{p,r}(\mathbb{C})$, prouver l'inégalité $\|AB\| \leq \|A\| \times \|B\|$.

c. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$. Trouver un vecteur $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{C})$ tel que

$$\|X\|_\infty = 1 \quad \text{et} \quad \|AX\|_\infty = \|A\|.$$

Exercice 5. (*) Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Soit $x_0 \in E$. Montrer l'égalité

$$\bigcap_{n \geq 1} B\left(x_0, 1 + \frac{1}{n}\right) = B_f(x_0, 1).$$

Exercice 6. (*) Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{R})$.

On suppose que la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice A et que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une certaine matrice B .

Montrer alors que la suite $(A_n \times B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $A \times B$.

Exercice 7. (*) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge. Montrer que sa limite est une matrice de projection.

Exercice 8. (*) Soit $A \in \mathcal{A}_p(\mathbb{R})$. On suppose que la suite $(A^n)_{n \geq 0}$ converge. Montrer que sa limite est la matrice nulle.

Exercice 9. ()** Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E . On suppose que f préserve le produit scalaire, ce qui signifie que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (f(x)|f(y)) = (x|y).$$

On pose $g = f - \text{Id}_E$.

a. Prouver l'égalité $\text{Im}(g) = (\text{Ker}(g))^\perp$.

b. Pour tout entier n strictement positif, on pose

$$p_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f^k.$$

Pour tout vecteur x de E , montrer que la suite $(p_n(x))_{n \geq 1}$ converge vers le projeté orthogonal de x sur $\text{Ker}(g)$.

Exercice 10. (*) Montrer que l'adhérence de $\text{GL}_p(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est $\mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Exercice 11. ()** Soit U un ouvert non vide d'un espace vectoriel normé $(E, \|\cdot\|)$.

Montrer que le sous-espace vectoriel de E engendré par U est égal à E .

Exercice 12. ()** On définit de E dans E la fonction

$$f : x \mapsto \frac{x}{\max(1, \|x\|)}.$$

Montrer que la fonction f est 2-lipschitzienne.

Exercice 13. ()** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E .

On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} \|u_{n+1} - u_n\|$ converge.

a. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée u^* .

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver la majoration $\|u_n - u^*\| \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_{k+1} - u_k\|$.

Exercice 14. ()** Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel de dimension finie. Soit F une partie fermée de E .

Soit $\phi : F \rightarrow F$ une application. On suppose qu'il existe $k \in [0, 1[$ tel que ϕ soit k -lipschitzienne.

On choisit $x_0 \in F$.

a. Montrer que la relation de récurrence $x_{n+1} = \phi(x_n)$ permet de définir une suite d'éléments de F .

b. Montrer qu'une telle suite est convergente dans F .

c. Montrer que sa limite ne dépend pas de x_0 .

d. Montrer que ϕ possède un unique point fixe dans F .