

Problème 1 — Inégalités de Hölder et de Minkowski

On fixe p dans $]1, +\infty[$ et on pose $q = \frac{p}{p-1}$. Par commodité, on estime que le nombre 0^p est bien défini et qu'il vaut 0.

Provisoirement, on fixe un entier $n \geq 2$. Pour tout élément $x = (x_1, \dots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on pose

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p}$$

et on définit $\|x\|_q$ de manière analogue.

Question 1. Montrer que la fonction $\|\cdot\|_p$ est positivement homogène et qu'elle vérifie la propriété de séparation.

Question 2. Vérifier que q est dans $]1, +\infty[$ et qu'il vérifie l'égalité $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Question 3. Pour tout couple (α, β) de $\mathbb{R}^2$, prouver l'inégalité $|\alpha\beta| \leq \frac{|\alpha|^p}{p} + \frac{|\beta|^q}{q}$.

Question 4. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$. Montrer l'inégalité de Hölder

$$\sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \|x\|_p \|y\|_q.$$

Pour cela, on appliquera la formule de la question précédente aux nombres x_k/X et y_k/Y pour des choix habiles de X et Y .

Question 5. Soient $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ dans $\mathbb{R}^n$.

a. Montrer la majoration

$$\sum_{k=1}^n |x_k| \times |x_k + y_k|^{p-1} \leq \|x\|_p \times \left(\sum_{k=1}^n |x_k + y_k|^p \right)^{1/q}.$$

b. Majorer de même la somme $\sum_{k=1}^n |y_k| \times |x_k + y_k|^{p-1}$.

c. En déduire l'inégalité de Minkowski $\|x + y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|_p$.

d. Qu'a-t-on démontré ?

Question 6. Soit x dans $\mathbb{R}^n$. Montrer que $\|x\|_p$ tend vers $\|x\|_\infty$ quand p tend vers $+\infty$.

Maintenant, on note ℓ^p l'ensemble des suites réelles $u = (u_k)_{k \geq 0}$ telles que la série $\sum |u_k|^p$ soit absolument convergente. Pour toute suite u de ℓ^p , on pose

$$N_p(u) = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k|^p \right)^{1/p}.$$

Question 7. Montrer que ℓ^p est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Question 8. Montrer que N_p est une norme sur ℓ^p .

Question 9. Soient $u \in \ell^p$ et $v \in \ell^q$. Montrer que la série $\sum |u_k v_k|$ est convergente et prouver la majoration

$$\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k v_k| \leq N_p(u) N_q(v).$$

Problème 2

Dans ce problème, on fixe un entier n supérieur ou égal à 2. On note U_n la matrice colonne de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

Étant donné une matrice ligne L de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, dire que cette matrice est *stochastique* signifie que ses coefficients sont tous positifs et que leur somme vaut 1.

Étant donné une matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dire que cette matrice est *stochastique* signifie qu'elle vérifie les deux conditions ci-dessous

$$\forall (i,j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, a_{i,j} \geq 0 \quad (1)$$

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^n a_{i,j} = 1, \quad (2)$$

ce qui revient à dire que toutes ses lignes sont stochastiques.

On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des matrices stochastiques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour tout vecteur colonne $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $\|X\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$.

On rappelle que $\|\cdot\|_\infty$ est une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Partie I — généralités sur les matrices stochastiques

Question 10. Vérifier que la condition (2) équivaut à l'égalité $AU_n = U_n$.

Question 11. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est stable par le produit matriciel.

Question 12. Montrer que $\mathcal{E}_n$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 13. Soit $(A_p)_{p \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{E}_n$. On suppose que cette suite converge vers une certaine matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que la matrice B est un élément de $\mathcal{E}_n$.

Question 14. Soit $A \in \mathcal{E}_n$. Soit $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Prouver l'inégalité $\|AX\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

Partie II — une propriété de convergence

On fixe une matrice A de $\mathcal{E}_n$. Pour tout entier k strictement positif, on pose

$$R_k = \frac{1}{k} \sum_{i=0}^{k-1} A^i, \quad \text{c'est-à-dire} \quad R_k = \frac{1}{k} (I_n + A + A^2 + \dots + A^{k-1}).$$

Question 15. Soit $W \in \text{Ker}(A - I_n)$. Vérifier que la suite $(R_k W)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est convergente et préciser sa limite.

Question 16. Soit $W \in \text{Im}(A - I_n)$. Montrer que la suite $(R_k W)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers le vecteur nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Question 17. À l'aide de ces deux résultats, montrer que $\text{Ker}(A - I_n)$ et $\text{Im}(A - I_n)$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Notation. On note p_A la projection sur $\text{Ker}(A - I_n)$ parallèlement à $\text{Im}(A - I_n)$. On note P_A la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui représente p_A dans la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Question 18. Pour tout vecteur W de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, montrer que la suite $(R_k W)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers $p_A(W)$.

Question 19. Montrer que la suite de matrices $(R_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers la matrice P_A .

Partie III — matrice stochastique régulière

Dans cette partie, on considère une matrice A de $\mathcal{E}_n$ et on suppose qu'elle est *régulière*, ce qui signifie qu'il existe un entier p pour lequel les coefficients de A^p sont tous strictement positifs. On fixe un tel entier p .

Question 20. Soit $W = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$ un élément de $\text{Ker}(A^p - I_n)$.

On considère un indice s tel que $w_s = \max(w_1, \dots, w_n)$. Montrer que $W = w_s U_n$.

Question 21. En déduire l'égalité $\text{Ker}(A^p - I_n) = \text{Vect}(U_n)$.

Question 22. En déduire l'égalité $\text{Ker}(A - I_n) = \text{Vect}(U_n)$.

Question 23. Montrer que la matrice P_A (introduite dans la deuxième partie) est de rang 1.

Question 24. Montrer l'existence d'une matrice ligne stochastique L de $\mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ telle que $P_A = U_n \times L$.

Question 25. Prouver l'égalité $P_A A = P_A$.

Question 26. En déduire l'égalité $LA = L$.

Question 27. Montrer que les coefficients de L sont tous strictement positifs.

Problème 3

Pour tout $x > 0$, on pose

$$f(x) = (-1)^{\lfloor \frac{1}{x} \rfloor} \times \frac{1}{x}.$$

Question 28. Prouver que la fonction f est continue par morceaux sur l'intervalle $]0, 1]$.

Question 29. La fonction f est-elle intégrable sur l'intervalle $]0, 1]$?

Question 30. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, calculer l'intégrale

$$I_n = \int_{1/(n+1)}^{1/n} f(t) \, dt.$$

Question 31. Justifier que la série de terme général I_n est convergente.

Question 32. Pour tout a dans $]0, 1]$, on pose $n(a) = \lfloor \frac{1}{a} \rfloor$. Prouver la majoration

$$\left| \int_a^{1/n(a)} f(t) \, dt \right| \leq \frac{1}{n(a)}.$$

Question 33. En déduire que l'intégrale $\int_0^1 f(t) \, dt$ est convergente et calculer sa valeur.

Problème 4

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on pose

$$\mathcal{E}(M) = \{PMP^{-1}; P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}.$$

Montrer que $\mathcal{E}(M)$ est borné si, et seulement si, la matrice M est un multiple de I_n .