Corrigés : rayonnement thermique

1. Échauffement radiatif d'une sphère

Comme la conductivité thermique de la boule est « infinie », le temps de diffusion associé à la longueur r est nul et la température en son sein s'uniformise instantanément. On attribue donc à chaque instant la même température $T(t)$ à tous les points de la sphère. Entre t et $t + dt$, elle reçoit le transfert thermique

$$\delta Q = S\sigma T_R^4\, dt - S\sigma T^4\, dt$$

et le premier principe s'écrit

$$C dT = S\sigma(T_R^4 - T^4)dt \quad .$$

On peut résoudre cette équation différentielle non linéaire par séparation des variables :

$$C\frac{dT}{T_R^4 - T^4} = S\sigma dt$$

puis en intégrant membre à membre. Cependant, un calcul plus simple est loisible. Comme T_0 est proche de T_R, $T(t)$ est à tout instant proche de T_R et $T_R^4 - T^4 \simeq 4T_R^3(T_R - T)$. Le premier principe devient donc

$$C\frac{dT}{dt} + 4S\sigma T_R^3\, T = 4S\sigma T_R^4 \quad .$$

Cette équation différentielle linéaire se résout en

$$T(t) = T_R + (T_0 - T_R)e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{C}{4S\sigma T_R^3} \quad .$$

Si on tient compte des échanges conducto-convectifs, il faut ajouter à δQ le terme $Sh(T_R - T)\, dt$ et le premier principe s'écrit

$$C dT = S\sigma(T_R^4 - T^4)dt + Sh(T_R - T)\, dt \quad .$$

Après linéarisation,

$$C\frac{dT}{dt} + (4\sigma T_R^3 + h)ST = 4\sigma T_R^4 + hT_R \quad .$$

La solution est de la même forme, mais la constante de temps devient

$$\tau' = \frac{C}{(4\sigma T_R^3 + h)S} \quad .$$

---

2. Température au soleil ou à l'ombre

Lorsque la sonde est à l'ombre, on devine que sa température est identique à celle de son environnement. Pour le justifier, plaçons dans la situation où cette sonde a atteint un état stationnaire. D'après le premier principe, le transfert thermique net qu'elle reçoit pendant une durée dt est alors nul.

$$4\pi r^2\sigma T_0^4\, dt - 4\pi r^2\sigma T^4\, dt + 4\pi r^2 \times h(T_0 - T)\, dt = 0$$

$$\sigma(T_0^4 - T^4) + h(T_0 - T) = 0 \quad .$$

L'unique solution de cette équation est $T = T_0$, ce qui est la conclusion espérée.

Plaçons maintenant la sonde au soleil. Elle est illuminée sur une demi-sphère, et les parcelles de cette surface reçoivent les rayons sous des angles variés. On simplifie le raisonnement en remarquant que la puissance reçue est la même que celle qui traverse un disque de rayon r : elle vaut donc $\pi r^2\varphi_\odot$. En régime stationnaire, on a maintenant

$$4\pi r^2\sigma T_0^4 - 4\pi r^2\sigma T^4 + 4\pi r^2 \times h(T_0 - T) + \pi r^2\varphi_\odot = 0$$

$$\sigma(T_0^4 - T^4) + h(T_0 - T) + \frac{\varphi_\odot}{4} = 0 \quad .$$

Nous ne savons pas résoudre exactement cette équation non linéaire. Si T est proche de T_0, on peut faire l'approximation

$$T_0^4 - T^4 \simeq 4T_0^3(T_0 - T) \quad .$$

L'équation devient

$$(4\sigma T_0^3 + h)(T_0 - T) + \frac{\varphi_\odot}{4} = 0$$

et se résout en

$$T = T_0 + \frac{\varphi_\odot}{4(4\sigma T_0^3 + h)} = T_0 + 9{,}7\,\mathrm{K} = 307{,}7\,\mathrm{K} \quad .$$

L'écart trouvé est en effet petit devant T_0, ce qui légitime a posteriori la linéarisation. En utilisant la fonction `fsolve` du module `scipy.optimize`, on peut résoudre l'équation en T^4 : on trouve alors $T = 307{,}5\,\mathrm{K}$.