

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — inégalités de Hölder intégrales

On considère deux nombres p et q de $]1, +\infty[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Dans le devoir en temps libre n° 3, on a démontré les inégalités suivantes, que l'on pourra ici utiliser librement sans les redémontrer

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |xy| \leq \frac{|x|^p}{p} + \frac{|y|^q}{q}$$

et

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \forall (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{k=1}^n |x_k y_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^n |y_k|^q \right)^{1/q}.$$

Question 1. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{C})$.

À l'aide de sommes de Riemann, démontrer l'inégalité

$$\int_a^b |f(t)g(t)| \, dt \leq \left(\int_a^b |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(t)|^q \, dt \right)^{1/q}.$$

Question 2. Soient f et g deux éléments de $\mathcal{C}^0(]0, +\infty[, \mathbb{C})$.

On suppose que les fonctions $|f|^p$ et $|g|^q$ sont intégrables sur $]0, +\infty[$.

Montrer alors que la fonction fg est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 3. Sous les mêmes hypothèses qu'à la question précédente, démontrer l'inégalité

$$\int_0^{+\infty} |f(t)g(t)| \, dt \leq \left(\int_0^{+\infty} |f(t)|^p \, dt \right)^{1/p} \left(\int_0^{+\infty} |g(t)|^q \, dt \right)^{1/q}.$$

Problème 2 — fonction Gamma

Pour tout $x > 0$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} \, dt$.

Question 4. Justifier que la fonction Γ est effectivement définie sur $]0, +\infty[$.

Question 5. Pour tout $x > 0$, justifier l'égalité $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Question 6. Au moyen d'une formule du problème 1, montrer que la fonction $G : x \mapsto \ln(\Gamma(x))$ est convexe sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Problème 3 — formule des compléments

On fixe un élément α de $]0, 1[$.

Partie I

Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$f_\alpha(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} e^{-xt} dt.$$

Question 7. Justifier que la fonction f_α est effectivement définie sur $[0, +\infty[$.

Pour le reste de ce problème, on admet que la fonction f_α est continue sur $[0, +\infty[$ et on donne l'égalité

$$f_\alpha(0) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)},$$

démontrée dans le devoir en temps libre n° 2.

On admet également que la fonction f_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$, avec

$$\forall x > 0, \quad f'_\alpha(x) = - \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{1+t} e^{-xt} dt.$$

Question 8. Pour tout $x > 0$, vérifier l'égalité $f_\alpha(x) - f'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Question 9. Soit $x > 0$. Pour tout $v > 0$, montrer les majorations

$$f_\alpha(x) \leq \int_0^v t^{\alpha-1} dt + e^{-xv} \int_v^{+\infty} \frac{t^{\alpha-1}}{1+t} dt \leq \frac{v^\alpha}{\alpha} + e^{-xv} f_\alpha(0).$$

Question 10. En déduire que la fonction f_α admet une limite nulle en $+\infty$ (on fera un raisonnement avec des ε).

Partie II

Pour tout $x \geq 0$, on pose

$$h_\alpha(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^\alpha} dt \quad \text{et} \quad g_\alpha(x) = \Gamma(\alpha) e^x h_\alpha(x).$$

Question 11. Justifier que la fonction h_α est effectivement définie sur $[0, +\infty[$.

Question 12. Justifier que la fonction h_α est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ et continue sur $[0, +\infty[$.

Donner de plus une expression de la fonction h'_α sur $]0, +\infty[$.

Question 13. Pour tout $x > 0$, vérifier l'égalité $g_\alpha(x) - g'_\alpha(x) = \frac{\Gamma(\alpha)}{x^\alpha}$.

Question 14. Pour tout $x > 0$, justifier la majoration $h_\alpha(x) \leq \frac{e^{-x}}{x^\alpha}$.

Question 15. En déduire que la fonction g_α admet une limite nulle en $+\infty$.

Partie III

On considère la fonction $\delta_\alpha = f_\alpha - g_\alpha$.

Question 16. Montrer qu'il existe une constante c telle que

$$\forall x > 0, \quad \delta_\alpha(x) = c e^x$$

puis prouver que $c = 0$.

Question 17. Démontrer finalement la *formule des compléments*

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)}.$$

Question 18. En déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ puis celle de l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-s^2} ds$.

Problème 4 — comparaison de normes

Étant donné un polynôme réel $P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$, on note

$$N_1(P) = \max\{|a_k| ; k \in \mathbb{N}\} \quad \text{et} \quad N_2(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k!}.$$

Question 19. Justifier que N_1 est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. On admet que N_2 est également une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

Question 20. Vérifier que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers le polynôme nul pour la norme N_2 .

Question 21. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, justifier l'inégalité $N_2(P) \leq e \times N_1(P)$.

Question 22. On suppose que la suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain polynôme L pour la norme N_1 .

Montrer qu'elle converge alors vers L pour la norme N_2 également.

Question 23. La suite $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle convergente pour la norme N_1 ?

Question 24. Les normes N_1 et N_2 sont-elles équivalentes ?