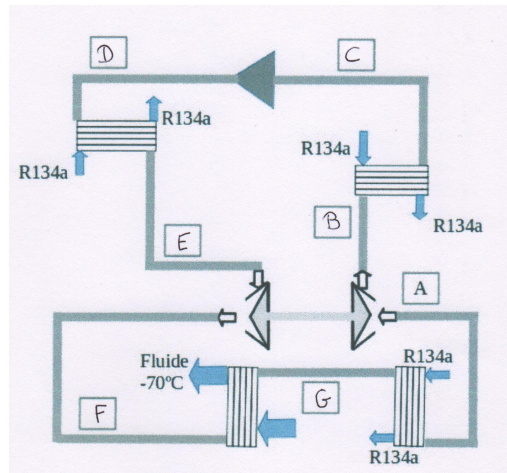


PC* 26 - DEVOIR N° 5

corrigé

Vers les basses températures Banque PT

1. Se reporter au cours.
- 2.



3. On place le point E à -10°C et 10 bars, puis on longe l'isentrope jusqu'à F à la pression de 1 bar. On lit $h_E = 490\text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h_F = 360\text{ kJ.kg}^{-1}$. Comme le turbinage est adiabatique,

$$w_{EF} = h_F - h_E = -130\text{ kJ.kg}^{-1}.$$

Selon l'énoncé, toute l'énergie que le gaz cède d'un côté du turbo-compresseur lui est restituée de l'autre côté, sans perte. Donc

$$w_{AB} = -w_{EF} = 130\text{ kJ.kg}^{-1}.$$

4. On place d'abord le point A à -20°C et 1 bar et on lit $h_A = 480\text{ kJ.kg}^{-1}$. Sur AB , le PPI donne $h_B = h_A + w_{AB} = 610\text{ kJ.kg}^{-1}$. Comme la compression est isentropique, on a aussi $s_B = s_A$ ce qui permet de placer B en longeant l'isentrope depuis A . L'évolution BC est isobare et conduit à -10°C ce qui place C . On place D par $s_D = s_C$ et $P_D = 10$ bar. Enfin, G est à -75°C à la pression 1 bar.

État		pression (bar)	température ($^\circ\text{C}$)	h (kJ.kg^{-1})
A	entrée compresseur	1	-20	480
B	entrée échangeur	4,3	110	610
C	entrée compresseur	4,4	-10	480
D	entrée échangeur	10	63	550
E	entrée turbine	10	-10	480
F	entrée échangeur	1	-140	360
G	entrée échangeur	1	-75	425

5. $q_{FG} = h_G - h_F = 65\text{ kJ.kg}^{-1}$. L'air à refroidir reçoit $-q_{FG}$.
6. Se reporter au cours de PCSI pour la démonstration.

$$e_C = \frac{T_{\text{froide}}}{T_{\text{chaude}} - T_{\text{froide}}} = \frac{203}{45} = 4,5$$

7. Le compresseur électrique consomme le travail massique $w_{CD} = h_D - h_C = 70\text{ kJ.kg}^{-1}$. L'efficacité de la machine est donnée par

$$e = \frac{q_{FG}}{w_{CD}} = \frac{65}{70} \quad \boxed{e = 0,93}$$

ce qui est bien en dessous de l'efficacité de Carnot. Ce cycle est très irréversible. La création d'entropie a lieu dans le choc thermique : l'air à la température de -140°C est mis en contact avec le fluide à refroidir bien plus chaud. Mais surtout, l'efficacité de Carnot s'applique à une machine ditherme alors qu'ici, l'air est mis en contact avec le fluide R134 à plusieurs reprises, avec des températures dont nous ne savons rien et avec sans doute encore de la création d'entropie.

8. Il faudrait aussi tenir compte de l'énergie dépensée dans le système complémentaire de refroidissement du R134a. C'est l'objet des questions suivantes.

9.

$$\begin{aligned} q_{R134a,BC} &= -q_{\text{air},BC} = -(h_C - h_B) = 130 \text{ kJ.kg}^{-1} \\ q_{R134a,DE} &= -q_{\text{air},DE} = -(h_E - h_D) = 70 \text{ kJ.kg}^{-1} \\ q_{R134a,GA} &= -q_{\text{air},GA} = -(h_A - h_G) = -55 \text{ kJ.kg}^{-1} \end{aligned}$$

Au total, $q_{134a} = 145 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

10. Avec une efficacité égale à 2, le travail nécessaire à alimenter la machine complémentaire est tel que

$$\frac{q_{R134a}}{w_{\text{comp}}} = 2 \quad \text{donc} \quad w_{\text{comp}} = \frac{q_{134a}}{2} = 72,5 \text{ kJ.kg}^{-1}.$$

L'efficacité globale de la machine est

$$e = \frac{q_{FG}}{w_{CD} + w_{\text{comp}}} = \frac{65}{70 + 72,5} \quad \boxed{e = 0,45}$$

11. On veut abaisser la température du diazote jusqu'à 77 K . Pour cela, on doit utiliser un fluide dont la température d'ébullition est inférieure à 77 K . On peut choisir H_2 , He ou Ne .

12. On place le point I puis on suit l'isentrope jusqu'à 1 bar pour lire $T_f = -15^\circ\text{C}$.

13. Pour un turbinage adiabatique irréversible, $\Delta s = s_{\text{cree}} > 0$ donc l'état final, toujours à la pression de 1 bar , présente une entropie plus élevée que précédemment. Le point f_{irrev} est donc à droite du point f_{rev} et $T_{f_{\text{irrev}}} > T_{f_{\text{rev}}}$.

14. $dH = TdS + VdP$. Pour un gaz parfait, $dH = C_p dT$ et $V = nRT/P$. On en déduit

$$dS = \frac{C_p dT}{T} - \frac{nR}{P} dP.$$

En intégrant entre $(T_{f,\text{rev}}, 1 \text{ bar})$ et $(T_{f,\text{irrev}}, 1 \text{ bar})$, on en déduit

$$S_{f_{\text{irrev}}} - S_{f_{\text{rev}}} = C_p \ln \frac{T_{f,\text{irrev}}}{T_{f_{\text{rev}}}}.$$

Étant donné le contexte de machines à flux continu, il serait plus judicieux d'écrire cette relation avec des grandeurs massiques, mais cela ne change rien à la conclusion. Comme $S_{f_{\text{irrev}}} > S_{f_{\text{rev}}}$, $\ln \frac{T_{f,\text{irrev}}}{T_{f_{\text{rev}}}} > 0$ et donc $T_{f_{\text{irrev}}} > T_{f_{\text{rev}}}$.

15. Si on atteint la courbe de rosée, des gouttes de liquide peuvent se former dans la turbine. Le choc de ces gouttes sur les hélices de la turbine peuvent l'endommager et favoriser la corrosion (l'air contient du dioxygène oxydant).

Un avantage du turbinage est qu'on n'a pas besoin d'utiliser un autre fluide pour le refroidissement (et cet autre fluide devrait avoir une température d'ébullition plus basse que celle à atteindre). L'inconvénient est qu'on ne doit faire attention à ne pas s'approcher de la courbe de saturation.

16. La détente de Joule-Thomson est une détente lente et adiabatique au travers d'un milieu poreux. Un milieu poreux ne comporte pas de partie mobile donc $w = 0$. Par hypothèse $q = 0$ et on néglige les variations d'énergies cinétiques et potentielles. Le premier principe industriel s'écrit donc $\Delta h = 0$: la détente est isenthalpique.

Pour un gaz parfait, h est une fonction monotone de T et ne dépend pas de P . Si h reste constant dans la détente, T reste constant aussi : on ne peut pas refroidir un gaz parfait de cette manière.

17. Sur la partie droite du diagramme (s, T) de l'hélium, on remarque que les courbes isenthalpiques sont presque horizontales. En allant d'une isobare à une autre à T constant (horizontalement), on conserve donc presque une même valeur de h . Dans cette région, le modèle du gaz parfait s'applique pour l'hélium. Dans cette région, $\Delta h = c_p \Delta T$. Entre $h = 40 \text{ kJ.kg}^{-1}$ et $h = 50 \text{ kJ.kg}^{-1}$, pour $S = 25000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, on lit $\Delta T = 6,7 - 4,8 = 1,9 \text{ K}$. Donc

$$c_p = \frac{10}{1,9} = 5,3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1} \quad .$$

Dans le modèle du gaz parfait, la valeur attendue est

$$c_p = \frac{5}{2} \frac{R}{M} = \frac{5}{2} \frac{8,31}{4.10^{-3}} = 5,2.10^3 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

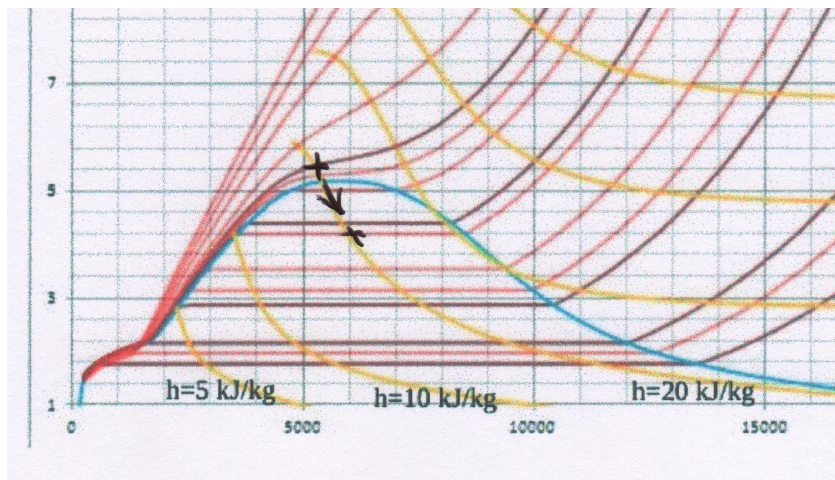
Compte tenu des imprécisions de lecture graphique, on peut dire que les deux valeurs sont en accord.

18. Dans une détente, la pression diminue. Si on souhaite que la température diminue aussi, la dérivée μ_{JT} doit être positive. Pour un gaz parfait,

$$V = \frac{nRT}{P} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = \frac{nR}{P} \quad \mu_{JT} \frac{T \frac{nR}{P} - V}{C_p} = \frac{V - V}{P} = 0 \quad .$$

Cette question est un peu idiote : on a déjà dit dans la question précédente que pour un gaz parfait, T ne varie pas avec P si h est maintenue constante.

19. La détente de Joule Thomson n'est efficace que lorsque les isenthalpiques sont décroissantes dans le diagramme (T, s) . Loin de la courbe de saturation, cela ne marche pas ce qui est un inconvénient. Par contre, cela permet d'atteindre de très basses températures en travaillant près de la courbe de saturation, ce qu'on ne pouvait pas faire par turbinage sous peine d'endommager la turbine.
20. On suit une isenthalpique de l'état initial à l'état final et on lit $T_{\text{finale}} = 4,2 \text{ K}$.



Pour trouver x_ℓ , utilisons le théorème des moments. On lit $s = 6000 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, $s_\ell = 3400 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$ et $s_v = 8500 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}$, donc

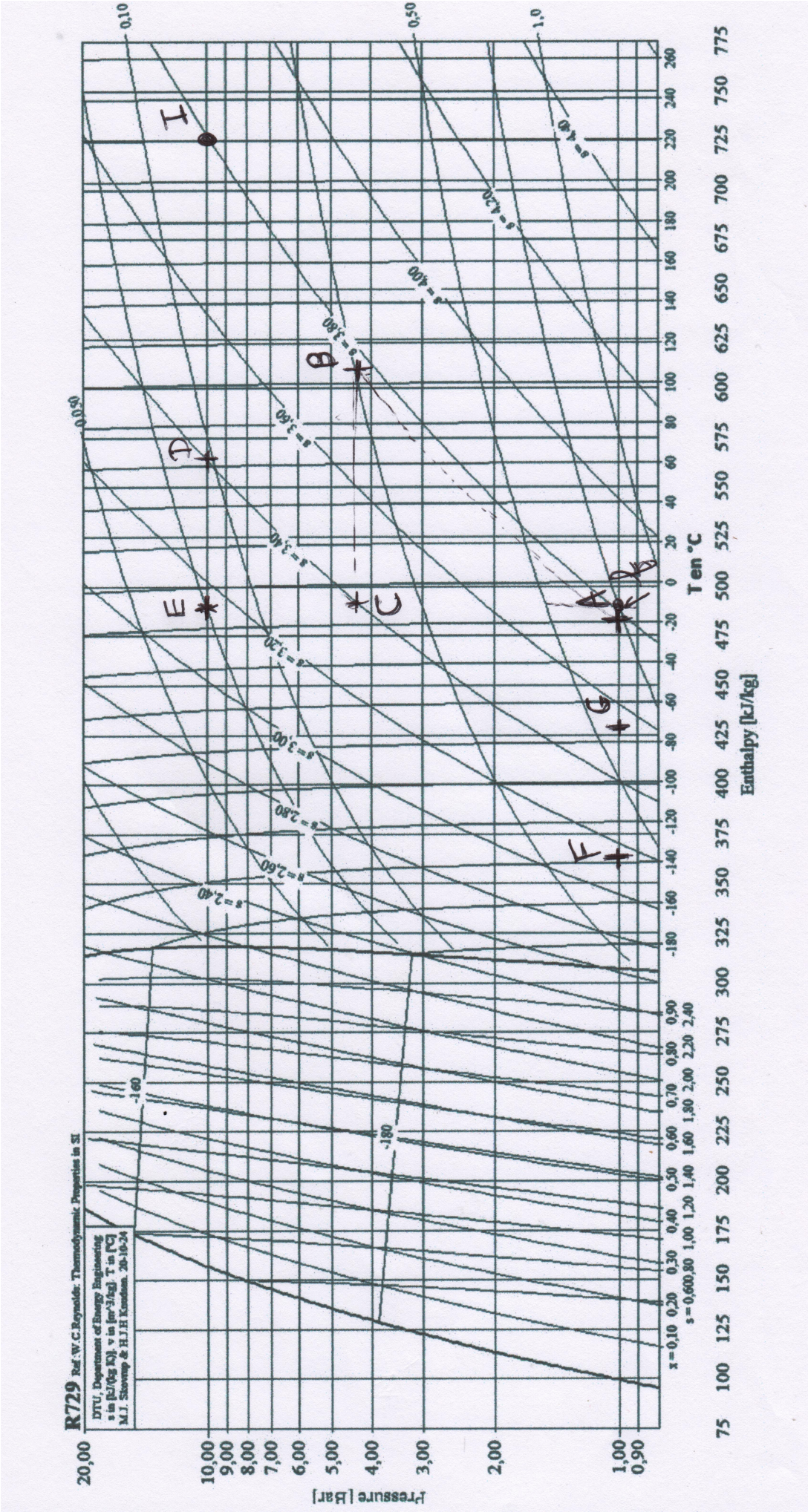
$$x_\ell = \frac{s_v - s}{s_v - s_\ell} = \frac{8500 - 6000}{8500 - 3400} = 0,49 \quad .$$

21. À pression atmosphérique, la température d'ébullition de l'hélium est de $4,2 \text{ K}$, comme on peut le lire dans le tableau de valeurs ou sur le diagramme (T, s) de ce fluide. Pour que l'hélium refroidisse un corps, il doit lui-même trouver à une température plus basse que ce corps. La température de refroidissement la plus basse possible est donc de $4,2 \text{ K}$.

À la pression de 15 mbar , on lit sur la graphique une nouvelle température d'ébullition de $1,8 \text{ K}$. C'est aussi la nouvelle température minimale de réfrigération par de l'hélium liquide.

22. Répondre à ce genre de question demande de relire attentivement l'énoncé.

	Phase 1	Phase 2	Phase 3
objet à refroidir	hélium à 80 K	aimants à 4,5 K	aimants à 1,9 K
liquide réfrigérant	N₂ à 77 K sous 1 bar	hélium à 4,2 K avec turbinage cryogénique	He à 1,8 K sous 15 mbar



Formation de stalactites
 Centrale-Supélec
II A 1.

$$\tau_d = \frac{h_0^2}{D} = 10^{-4} \text{ s} \quad \tau_L = \frac{L}{u_m} = 10 - 1000 \text{ s}$$

Comme $\tau_L \gg \tau_d$, l'eau se déplace très peu pendant la diffusion. On néglige son mouvement.

II A 2.

$$\tau_h = \frac{h_0}{\delta L / \delta t} = 10^{-3} \text{ siècle} \approx 1 \text{ mois}$$

$\tau_d \ll \tau_h$: un régime quasi-stationnaire s'établit comme si la stalactite était figée.

II A 3.

$$\delta m = \rho \pi R_0^2 \delta L = 0,85 \text{ kg} \quad \text{avec } \rho = 2,7 \cdot 10^3 \text{ kg m}^{-3}$$

$$\delta m_{\text{ca}} = 0,4 \delta m = 0,34 \text{ kg}$$

Pendant un siècle, le volume d'eau écoulé avant

$$V = u_m 2\pi R_0 h \Delta t = 19,8 \text{ m}^3 \quad (u_m = 1 \text{ mm s}^{-1}, R_0 = 5 \text{ cm})$$

Cette eau contient la masse de calcium :

$$m_{\text{ca}} = V [\text{Ca}^{2+}] = 3 \text{ kg}$$

$\delta m_{\text{ca}} \ll m_{\text{ca}}$: l'eau qui tombe sous la stalactite est presque aussi riche en calcium, d'où la formation d'une stalagmite.

II A 4. Pendant dt , le système reçoit par diffusion :

$$\delta^2 \overline{N_r} = j(z) dS dt - j(z + dz) dS dt \quad \text{molécules de CO}_2.$$

Au sein du système, le nombre de molécules de CO₂ produites $\delta^2 N_{\text{prod}} = \frac{m_0 - m}{\tau} dS dz dt$. En régime stationnaire :

$$\begin{aligned} \delta^2 N_r + \delta^2 N_{\text{prod}} &= 0 \\ j(z) dS dt - j(z + dz) dS dt + \frac{n_0 - n}{\tau} dS dz dt &= 0 \\ -\frac{dj}{dz} + \frac{n_0 - n}{\tau} &= 0 \end{aligned}$$

Par la loi de Fick, $j = -D \frac{dn}{dz}$

$$\text{d'où } \frac{dn}{dz} - \frac{n}{D\tau} = -\frac{n_0}{D\tau} \quad \boxed{\delta = \sqrt{D\tau} = 3 \text{ mm}}$$

II A 5.

$$n = n_0 + A \exp(z/\delta) + B \exp(-z/\delta)$$

II A 6. La condition $\frac{\partial n}{\partial z}$ équivaut à $j = 0$. En $z = 0$, elle signifie que le calcaire solide est imperméable à CO₂. Il en découle $\frac{A}{\delta} - \frac{B}{\delta} = 0$ puis $A = B$.

$$n(z) = n_0 + 2A \cosh(z/\delta)$$

II A 7.

$$n(h_0) = n_0 + 2A \cosh\left(\frac{h}{\delta}\right) = \chi n_\infty$$

$$2A = \frac{\chi n_\infty - n_0}{\cosh(h/\delta)}$$

$$\boxed{n(z) = n_0 + (\chi n_\infty - n_0) \frac{\cosh(z/\delta)}{\cosh(h/\delta)}}$$

II A 8.

$$j = -D \frac{\partial n}{\partial z} = -D \left(\frac{\chi n_\infty - n_0}{\delta} \right) \frac{\sinh(z/\delta)}{\cosh(h/\delta)}$$

$$j(h) = -D \left(\frac{\chi n_\infty - n_0}{\delta} \right) \tanh(h/\delta)$$

$$j(h) = -\frac{Dh}{\delta^2} (\chi n_\infty - n_0)$$

comme $\delta^2 = D\tau_c$, $j(h) = -\frac{h}{\tau_c} (\chi n_\infty - n_0)$

La stœchiométrie montre qu'une molécule de CaCO_3 se dépose chaque fois qu'une molécule de CO_2 apparaît. En régime permanent, le flux de CO_2 évacué en $z = h$ est donc égal au taux surfacique de production de CO_2 dans la couche liquide.

$$\frac{\delta^2 N}{\delta S dt} = j(h) = -\frac{h}{\tau_c} (\chi n_\infty - n_0)$$

$$\boxed{\delta = -\frac{(\chi n_\infty - n_0)}{\tau_c}}$$

II A 9. À $pH = 9, \sigma > 0$: le calcaire se dépose effectivement et la stalactite se forme. Si σ était négatif, elle se dissoudrait !

II B 1. Pendant dt , il se dépose $\frac{\delta^2 N}{N_A}$ moles de CaCO_3 de volume $\frac{\delta^2 N}{N_A} v_m$. Ce volume vaut aussi $V_\perp dt dS$.

$$\frac{\delta^2 N}{N_A} v_m = V_\perp dt dS$$

$$V_\perp = \frac{\delta^2 N}{N_A} \frac{v_m}{dt dS} = \frac{\sigma h v_m}{N_A}$$

$$V_\perp = \frac{\sigma v_m}{N_A} \ell_c^{4/3} (R \sin \theta)^{-1/3} \quad \boxed{\gamma = \frac{\sigma v_m}{N_A} \ell_c^{4/3}}$$

II B 2.

$$\cos \theta V_p \Delta t = V_\perp \Delta t$$

$$V_\perp = V_p \cos \theta$$

II B 3.

$$V_\perp \simeq \frac{\gamma}{R^{4/3}} \quad \text{et} \quad V_p \cos \theta \simeq -V_p \frac{dR}{dZ}$$

$$\text{donc } \frac{\gamma}{R^{4/3}} \simeq -V_p \frac{dR}{dZ} \quad R^{4/3} dR \simeq -\frac{\gamma}{V_p} dZ$$

$$\left[\frac{3}{4} R^{7/3} \right]_{R_0}^R = -\frac{\gamma}{V_p} \left[\frac{Z}{2} \right]_0^Z \quad \boxed{Z = -\frac{3}{7} \frac{V_p}{\gamma} (R^{7/3} - R_0^{7/3})}$$

On ne peut pas appliquer le modèle près de la pointe car θ n'y est pas proche de $\frac{\pi}{2}$.