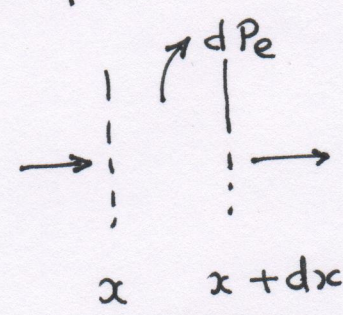


Rafraîchissement d'une coulée de lave

1. La surface supérieure est $dS = l dx$. D'après la loi de Stefan, elle émet $dP_e = \sigma T^4 l dx$.

2.  Le 1^{er} principe industriel s'écrit
 $D_m c (T(x+dx) - T(x)) = -dP_e$
 $D_m c dT = -\sigma T^4 l dx$

$$\boxed{\frac{dT}{dx} = -\frac{\sigma l}{D_m c} T^4}$$

3. On sépare les variables : $\frac{dT}{T^4} = -\frac{\sigma l}{D_m c} dx$

puis on intègre membre à membre :

$$-\frac{1}{3} \frac{1}{T^3} = -\frac{\sigma l}{D_m c} x + Cte$$

Pour $x=0$, $T=T_0$ donc $Cte = -\frac{1}{3} T_0^3$

$$\frac{1}{T^3} = \frac{1}{T_0^3} + \frac{3 l \sigma x}{D_m c}$$

$$\boxed{a = \frac{3 l \sigma}{D_m c}} \quad T = \left(\frac{1}{T_0^3} + a x \right)^{-1/3}$$

4. Pour $x = L = 15 \text{ km}$, $T = 1113^\circ \text{C}$.

Attention : pour cette application numérique, il faut d'abord exprimer T_0 en kelvins ($T_0 = 1453 \text{ K}$), puis calculer T en K ($T = 1386 \text{ K}$) puis revenir en $^\circ \text{C}$.

Selon ce modèle, T descend sous 1150°C avant d'atteindre la mer. Mais alors, la lave devient

2

solide et ne peut plus s'écouler et ne pourrait pas atteindre la mer!

$$5. dP_c = -\sigma l dx T_c^4$$

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\sigma l T_c^4}{D_m c} = -\frac{a}{3} T_c^4$$

$$T(x) = T_0 - \frac{a}{3} T_c^4 x$$

$$6. T_c = 423 \text{ K}$$

$$\frac{a T_c^4}{3} L = 0,52 \text{ K}$$

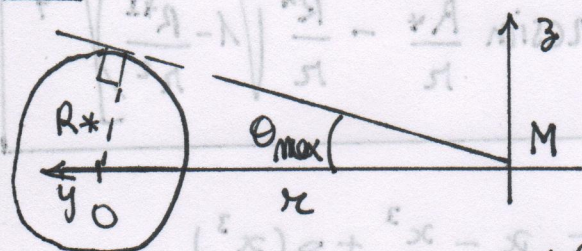
$$T(L) = 1179,5 \text{ K}$$

$$T(L) = T_0 - 0,52 \text{ K}$$

Dans ce modèle, la lave se refroidit très peu et reste donc liquide jusqu'à la mer.

Thermique d'un disque protoplanétaire

1. Vue dans le plan $(M, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$:



$$\sin \theta_{\max} = \frac{R_*}{r}$$

Lorsque α décrit l'hémisphère supérieure de l'étoile, φ varie de 0 à π .

$$dP_r = \int_0^{\theta_{\max}} \int_0^{\pi} L_* \sin^2 \theta \, d\theta \, d\varphi \, dS' \sin \varphi$$

$$= L_* dS' \int_0^{\theta_{\max}} \sin^2 \theta \, d\theta \int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi$$

$$\int_0^{\theta_{\max}} \sin^2 \theta \, d\theta = \int_0^{\theta_{\max}} d\theta \frac{1 - \cos 2\theta}{2} = \frac{\theta_{\max}}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta_{\max}$$

$$\int_0^{\pi} \sin \varphi \, d\varphi = [-\cos \varphi]_0^{\pi} = 2$$

$$dP_r = L_* dS' \left(\theta_{\max} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_{\max} \right)$$

$$= L_* dS' \left(\theta_{\max} - \sin \theta_{\max} \cos \theta_{\max} \right)$$

$$\mu_r = \frac{dP_r}{dS'} = L_* \left(\theta_{\max} - \sin \theta_{\max} \cos \theta_{\max} \right)$$

$$\mu_r = L_* \left(\arcsin \frac{R_*}{r} - \frac{R_*}{r} \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} \right)$$

2. La surface dS' émet $dP_e = \sigma T(r)^4 dS'$.

À l'équilibre, $dP_e = dP_r$ i.e. $\sigma T^4 = \mu r$

$$T(r) = \left(\frac{\mu r}{\sigma} \right)^{1/4}$$

$$T(r) = \left[\frac{L^*}{\sigma} \left(\arcsin \frac{R_*}{r} - \frac{R_*}{r} \sqrt{1 - \frac{R_*^2}{r^2}} \right) \right]^{1/4}$$

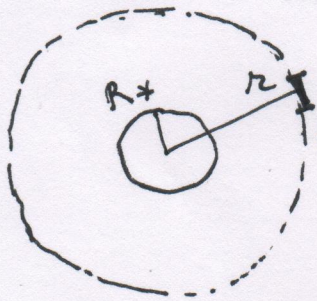
3. $x \sqrt{1-x^2} = x \left(1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \right) = x - \frac{x^3}{2} + o(x^3)$

$$\arcsin x - x \sqrt{1-x^2} = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3) - x + \frac{x^3}{2} + o(x^3)$$

$$= \frac{2}{3} x^3 + o(x^3)$$

Pour $\frac{R_*}{r} \ll 1$, $T(r) \simeq \left(\frac{2}{3} \frac{L^*}{\sigma} \frac{R_*^3}{r^3} \right)^{1/4}$ $T(r) \propto r^{-3/4}$

4. Soit P_* la puissance rayonnée par l'étoile.



Cette puissance se répartit sur toute la sphère de rayon r et la traverse presque orthogonalement si $r \gg R_*$.

Donc dS' reçoit et absorbe

$$dP_r = \frac{P_* dS'}{4\pi r^2}$$

dS' émet vers l'extérieur la puissance $dP_e = \sigma T(r)^4 dS'$.

À l'équilibre, $dP_r = dP_e$ d'où

$$T(r) = \left(\frac{P_*}{4\pi\sigma r^2} \right)^{1/4}$$

$$T(r) \propto r^{-1/2}$$

On peut préciser que $P_* = 4\pi R_*^2 M_*$ avec $M_* = \pi L_*$,

d'où $T(r) = \left(\frac{\pi}{\sigma} \frac{R_*^2}{r^2} \right)^{1/4}$, mais ce n'est pas demandé.

Anémométrie à fil chaud

0. Question de cours. $T_1 - T_2 = R_{th} \Phi$ est l'analogie de $V_1 - V_2 = R I$. On démontre $R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$.

1. $R_w = \frac{\rho_w L_w}{\pi \left(\frac{d_w}{2}\right)^2}$ $R_w = \frac{4 \rho_w L_w}{\pi d_w^2}$

$P_j = R_w I^2 = \frac{4 L_w \rho_w I^2}{\pi d_w^2}$

Le volume du fil est $\pi \frac{d_w^2}{4} L_w$, d'où la puissance volumique $p_w = \frac{P_j}{V} = \frac{16 \rho_w I^2}{\pi^2 d_w^4}$.

L'énoncé suppose implicitement que la puissance Joule est uniformément répartie dans le volume du fil.

2. Question de cours. Spatialement, T ne dépend que de x donc $\vec{f}_a$ est colinéaire à $\vec{u}_x$.
L'application du 1^{er} principe à une tranche de fil d'épaisseur dx donne

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{D_w} \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{p_w}{\lambda_w}$$

avec $D_w = \frac{\lambda_w}{\rho_w c_w}$

3. h s'exprime en $W.m^{-2}.K^{-1}$.

Le transfert thermique est facilité lorsque le fluide se déplace (c'est pour cela qu'on utilise des ventilateurs lorsqu'il fait trop chaud). Donc h augmente si V augmente. En conséquence, T_w diminue si V augmente.

2

4. En régime permanent, $T(x, t)$ ne dépend pas de t et l'énergie interne de la zone considérée non plus : $dU = 0$.

Pendant dt , cette zone reçoit :

- $\delta Q_1 = S j(x) dt - S j(x+dx) dt$ $S = \pi d_w^2 / 4$
- $\delta Q_2 = -h (T_w(x) - T_f) dS_{lat} dt$ $dS_{lat} = \pi d_w dx$
- $\delta W = p_w S dx$ par effet Joule.

Le 1^{er} principe s'écrit : $\delta Q_1 + \delta Q_2 + \delta W = 0$,

$$\pi \frac{d_w^2}{4} \left(\frac{j(x) - j(x+dx)}{dx} \right) - h \pi d_w (T_w(x) - T_f) + p_w \pi \frac{d_w^2}{4} = 0$$

$$\frac{j(x) - j(x+dx)}{dx} = - \frac{dj}{dx} = \lambda_w \frac{d^2 T_w}{dx^2}$$

$$\boxed{\frac{d^2 T_w}{dx^2} - \frac{4h}{d_w \lambda_w} (T_w(x) - T_f) + \frac{p_w}{\lambda_w} = 0}$$

5. $p_w = \frac{16 I^2}{\pi^2 d_w^4} \rho_f [1 + \alpha (T_w - T_f)]$

$$\frac{d^2 T}{dx^2} - \frac{4h}{d_w \lambda_w} (T_w - T_f) + \frac{16 I^2}{\lambda_w \pi^2 d_w^4} \rho_f [1 + \alpha (T_w - T_f)] = 0.$$

En regroupant les termes en $T_1 = T_w - T_f$, et comme

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = \frac{d^2 T_1}{dx^2}, \text{ on obtient } \frac{d^2 T_1}{dx^2} + K_1 T_1 + K_2 = 0$$

avec $\boxed{K_1 = \frac{16 \rho_f \alpha I^2}{\lambda_w \pi^2 d_w^4} - \frac{4h}{d_w d_w} \quad K_2 = \frac{16 \rho_f I^2}{\lambda_w \pi^2 d_w^4}}$

On vérifie : $\alpha K_2 = \frac{16 \rho_f I^2}{\lambda_w \pi^2 d_w^4} = K_1 + \frac{4h}{\lambda_w d_w} < \omega T > .8$ 3

$K_1 < 0$ si $h > \frac{4 \rho_f \alpha I^2}{\pi^2 d_w^3}$

6. R_{th} est défini par $T_1 - T_2 = R_{th} \phi_{1 \rightarrow 2}$. Pour $R_{th} = 0$, $T_1 = T_2$. Dans notre cas, cela signifie que les extrémités du fil sont à la même température T_f que les broches : $T_w(-\frac{L}{2}) = T_f$; $T_w(\frac{L}{2}) = T_f$ ou : $T_1(\frac{L}{2}) = T_1(-\frac{L}{2}) = 0$.
L'équa diff (3) $\frac{d^2 T_1}{dx^2} - \frac{T_1}{l_c^2} = -K_2$ se résout en :

$$T_1(x) = K_2 l_c^2 + A \operatorname{ch} \frac{x}{l_c} + B \operatorname{sh} \frac{x}{l_c}$$

Avec $T_f(-\frac{L}{2}) = T_f(\frac{L}{2}) = 0$, on trouve $B = 0$ $A = \frac{-K_2 l_c^2}{\operatorname{ch} \frac{L_w}{2l_c}}$

$$T_1 = K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} x/l_c}{\operatorname{ch} \frac{L_w}{2l_c}} \right)$$

$$T_w = T_f + K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{\operatorname{ch} x/l_c}{\operatorname{ch} \frac{L_w}{2l_c}} \right)$$

7. $j = -\lambda_w \frac{dT_w}{dx} = \lambda_w \frac{K_2 l_c^2}{l_c} \frac{\operatorname{ch} x/l_c}{\operatorname{ch} L_w/2l_c}$

Par symétrie, le flux est le même aux deux extrémités et $\dot{Q}_g = 2 j(\frac{L_w}{2}) \frac{\pi d_w^2}{4}$

$$\dot{Q}_g = \frac{\pi d_w^2}{2} \lambda_w K_2 l_c \tanh\left(\frac{L_w}{2l_c}\right)$$

4

$$8. \langle T_w \rangle = \frac{1}{L_w} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} T_w(x) dx$$

$$= T_f + K_2 l_c^2 - \frac{K_2 l_c^2}{L_w \operatorname{ch} \frac{L_w}{2l_c}} \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \operatorname{sh} x/l_c dx$$

$$\langle T_w \rangle = T_f + K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{2l_c}{L_w} \tanh \frac{L_w}{2l_c} \right)$$

$$\Lambda = \frac{2l_c}{L_w}$$

9. Le maximum est atteint en $x=0$.

$$T_{w\max} - T_f = K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} \frac{L_w}{2l_c}} \right) = K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{1}{\operatorname{ch} h} \right)$$

$$\langle T_w \rangle - T_f = K_2 l_c^2 \left(1 - \frac{2l_c}{L_w} \tanh h \right)$$

$$\xi = \frac{1 - \frac{1}{\operatorname{ch} h}}{1 - \frac{1}{h} \tanh h}$$

$$\xi = 1,28$$

On peut approximer: $\operatorname{ch} h \gg 1$ $1 - \frac{1}{\operatorname{ch} h} \approx 1$

$$\tanh h \approx 1 \quad \text{et} \quad \xi \approx \frac{1}{1 - 1/h}$$

$$\xi \approx \frac{4}{3}$$

10. On voit un profil symétrique (pair), en forme de cosinus hyperbolique, présentant un maximum en $x=0$. Plus h est grand, plus basse est $T_{\max}$. Mais surtout, une grande valeur de h fait que T_w est voisin de $T_{\max}$ sur la majeure partie du fil.

5

Dire que le fil est long signifie : $L_w \gg l_c$, où l_c est ici la longueur caractéristique de variation de la fonction $\text{ch } x/l_c$. Fil long : $k \gg 1$

11. Pour un fil long, $T_w \approx \langle T_w \rangle$ et donc

$$R_w \approx \frac{\rho_w L_w}{S_w} \approx \frac{\rho_f}{S_w} [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)] L$$

$$\boxed{R_w \approx R_{w0} = R_f [1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)]}$$

avec $R_f = \frac{\rho_f L}{S_w}$ pour un fil à T_f .

12. En régime permanent, le 1^{er} principe appliqué à l'ensemble du fil s'écrit $\dot{Q}_f - \dot{Q}_f - \dot{Q}_g = 0$.

Si on néglige $\dot{Q}_g$, $\dot{Q}_f \approx \dot{Q}_f$.

$$\dot{Q}_f = \int_{-L_w/2}^{L_w/2} \pi d_w h (T_w(x) - T_f) dx$$

$$= \pi d_w h \times L_w (\langle T_w \rangle - T_f) \text{ par définition de } \langle T_w \rangle.$$

donc $\boxed{\dot{Q}_f \approx \pi d_w L_w h (\langle T_w \rangle - T_f)}$

13. $[\eta] = \left[\frac{F}{S} \right] T = \frac{MLT^{-2}}{L^2} T = ML^{-1}T^{-1}$

$$[Re] = \frac{ML^{-3}LT^{-1}L}{ML^{-1}T^{-1}} = 1$$

Re est sans dimension.

$$\boxed{\eta = \frac{F}{S} = \frac{MLT^{-2}}{L^2} = MT^{-2}L^{-1}}$$

14. $[Nu]$ s'exprime en $\frac{W m^{-2} K^{-1} m}{W m^{-1} K^{-1}} = 1$.

Nu est sans dimension.

Ce nombre compare les effets de la conducto-convection (avec h au numérateur) et de la conduction (avec λ_f au dénominateur).

Lorsque V augmente, Nu augmente car h augmente.

15. Question difficile!

• $l_c = \frac{1}{\sqrt{-K_2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{4h}{\lambda_f} - \alpha K_2}}$

d'après q5:

• $\frac{R_{ws}}{R_f} = 1 + \alpha (\langle T_w \rangle - T_f)$ d'après q11

$\frac{R_{ws}}{R_f} = 1 + \alpha K_2 l_c^2$ d'après q8 avec $h \gg 1$

donc $\alpha K_2 = \left(\frac{R_{ws}}{R_f} - 1 \right) \frac{1}{l_c^2}$

• On élimine αK_2 dans l'expression de l_c^2 :

$$l_c^2 = \frac{1}{\frac{4h}{\lambda_f} - \left(\frac{R_{ws}}{R_f} - 1 \right) \frac{1}{l_c^2}}$$

d'où on tire $l_c = \sqrt{\frac{R_{ws}}{R_f} \frac{\lambda_f}{4h}}$

$$l_c = \sqrt{\frac{R_{ws}}{R_f} \frac{\lambda_f}{\lambda_f} \frac{d_f}{4h} \frac{dw}{d_f} \frac{dw}{4h}}$$

ou $\frac{d_f}{h} = \frac{dw}{Nu}$

$$l_c = \sqrt{\frac{R_{ws}}{R_f} \frac{\lambda_f}{\lambda_f} \frac{dw^2}{4Nu}}$$

$$l_c = \frac{dw}{2} \sqrt{\theta} \quad \nu = 1/2$$

16. $\dot{Q}_f$ a déjà été exprimé dans Q12, il suffit ici de remplacer $\langle T_w \rangle$ par son expression vue dans Q8.

$$\dot{Q}_f = \pi d_w h k_c l_c^2 L_w \left(1 - \frac{2l_c \tanh \frac{L_w}{2l_c}}{L_w} \right)$$

17. On utilise Q7 et Q16. on obtient

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} = \frac{2l_c h L_w}{d_w L_w} \frac{1 - \frac{1}{k} \tanh k}{\tanh k}$$

Fil long : $k \gg 1$, $\tanh k \approx 1$ $1 - \frac{1}{k} \tanh k \approx 1$

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \approx \frac{2l_c h L_w}{d_w L_w} \quad \text{or } l_c = \frac{d_w}{2} \sqrt{\theta} \text{ avec } \theta \approx 1$$

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \approx 1 \times \frac{h L_w}{d_w} \quad \text{avec } L_w \gg l_c \approx \frac{d_w}{2}$$

$$\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \gg \frac{h d_w}{d_w} = \frac{h d_w}{d_f} \frac{d_f}{d_w} = Nu \frac{d_f}{d_w}$$

d_f n'est pas donné par l'énoncé!

Comme $Nu \approx 20$, j'espère que $Nu \frac{d_f}{d_w}$ est au moins de l'ordre de 1. Alors $\frac{\dot{Q}_f}{\dot{Q}_g} \gg 1$.

On peut donc négliger $\dot{Q}_g$.

18. D'après Q12, et comme $\dot{Q}_j = R_{w\infty} I^2$, on a

$$R_w I^2 = \pi d_w L_w h (\langle T_w \rangle - T_f)$$

$$\text{D'après Q11, } \langle T_w \rangle - T_f = \left(\frac{R_{w\infty}}{R_f} - 1 \right) \frac{1}{2}$$

Donc $R_{w\infty} I^2 = \pi d_w h L_w \frac{1}{\alpha} \left(\frac{R_{w\infty}}{R_f} - 1 \right)$
 $= \pi \lambda_f N_u \frac{L_w}{\alpha} \left(\frac{R_{w\infty}}{R_f} - 1 \right)$

D'où $N_u = \frac{\alpha R_{w\infty} I^2}{\pi \lambda_f L_w \left(\frac{R_{w\infty}}{R_f} - 1 \right)}$ (1)

Or $N_u = A + B \sqrt{Re} = A + B \sqrt{\frac{\mu_f V d_w}{\gamma}}$

donc $V = \frac{\gamma}{\mu_f d_w B^2} (N_u - A)^2$ (2)

Il suffit de reporter l'expression (1) de N_u dans l'expression (2) pour voir que V se déduit de la mesure de $R_{w\infty}$.

Imagerie de nanoparticules d'or

Q13. Le problème est invariant par rotation donc, en coord. sphériques, $T(r, \theta, \varphi)$ ne dépend ni de θ ni de φ .

Q14. On applique le 1^{er} principe à l'espace de gel contenu entre les sphères de rayons r et $r+dr$.

Pendant dt , son énergie varie de $dU = 4\pi r^2 dr C_g \frac{\partial T}{\partial t} dt$.

Il reçoit $\delta Q = 4\pi r^2 j(r, t) dt - 4\pi (r+dr)^2 j(r+dr, t) dt$.

$dU = \delta Q$ s'écrit :

$$4\pi r^2 dr C_g \frac{\partial T}{\partial t} dt = 4\pi dt \left[r^2 j(r, t) - (r+dr)^2 j(r+dr, t) \right]$$

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{r^2} \left(- \frac{\partial}{\partial r} (r^2 j(r, t)) \right)$$

D'après la loi de Fourier, $j = -\kappa \frac{\partial T}{\partial r}$ donc

$$C_g \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right)$$

Q15. En régime stationnaire, $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$ donc $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = 0$.

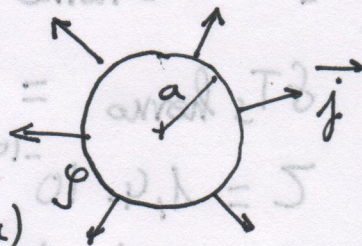
Cette relation s'intègre en : $r^2 \frac{dT}{dr} = A$ puis

$$\frac{dT}{dr} = \frac{A}{r^2} \quad \text{et} \quad T = -\frac{A}{r} + B.$$

Les conditions de bord : $T(a^+) = T_s$ et $\lim_{r \rightarrow \infty} T = T_0$

donnent $B = T_0$ et $-A = a(T_s - T_0)$

$$T = \frac{a}{r} (T_s - T_0) + T_0$$



Q16 $P_{sp \rightarrow mil} = \int_{\mathcal{V}} \vec{j} \cdot d\vec{S} = 4\pi a^2 j(a)$

2 $\bar{f}$ est continu, on peut l'évaluer en a^+ .

$$\bar{f}(a^+) = -k \frac{\partial T}{\partial r}(a^+) \quad \frac{\partial T}{\partial r} = -\frac{a}{r^2} (T_s - T_0)$$

$$= \frac{k}{a} (T_s - T_0)$$

$$\underline{P_{sp \rightarrow mil} = 4\pi a k (T_s - T_0)}$$

Q17 Pendant dt , l'enthalpie de la sphère varie de

$$dH = \frac{4}{3} \pi a^3 C_{Au} dT_s \quad \text{avec } T_s = T_0 + \delta T_s$$

$$dT_s = d(\delta T_s)$$

L'énergie absorbée par la sphère est $P_{abs} dt$. Vers

le gel, elle cède $P_{sp \rightarrow mil} dt$. Le 1^{er} principe

s'écrit $dH = P_{abs} dt - P_{sp \rightarrow mil} dt$, soit

$$\frac{4}{3} \pi a^3 C_{Au} \frac{d\delta T_s}{dt} = P_{abs} - 4\pi k \delta T_s$$

$$\delta T_s + \frac{4}{3} \frac{\pi a^3 C_{Au}}{4\pi a k} \frac{d}{dt} \delta T_s = \frac{P_{abs}}{4\pi a k}$$

On identifie $\tau = \frac{C_{Au} a^2}{3k}$ $\tau = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$.

Q18 L'équation différentielle $\delta T_s + \tau \frac{d}{dt} \delta T_s = \frac{P_{abs}(t)}{4\pi a k}$

a une solution générale de la forme

$$\delta T_s = \delta T_{s \text{ homo}} + \delta T_{s \text{ part}}$$

avec $\delta T_{s \text{ homo}} = A e^{-t/\tau}$.

Comme $\tau = 1,4 \cdot 10^{-10} \text{ s}$, $\delta T_{s \text{ homo}}$ est rapidement

négligeable. Le terme δT_s décrit le régime permanent

associé au membre de droite, $\frac{P_0 (1 + \cos \Omega t)}{4\pi K a}$ 3

- Le terme $\frac{P_0}{4\pi K a}$ correspond à une solution particulière

$$\delta T_{s1} = \frac{P_0}{4\pi K a}$$

- Le terme $\frac{P_0 \cos \Omega t}{4\pi K a}$ correspond à une solution de type

sinusoïdal forcée. On la trouve en notation complexe.

$$\delta T_{s2} = \text{Re}(\delta \underline{T}_{s2})$$

$$\delta \underline{T}_{s2} = B e^{j\Omega t}$$

$$\delta \underline{T}_{s2} \text{ est solution si: } B e^{j\Omega t} + \tau j \Omega B e^{j\Omega t} = \frac{P_0}{4\pi K a} e^{j\Omega t}$$

$$\text{On calcule } \underline{\Omega \tau} = 6 \cdot 10^{-4}$$

$$(1 + j \Omega \tau) B = \frac{P_0}{4\pi K a}$$

donc $1 + j \Omega \tau \approx 1$ et

$$B \approx \frac{P_0}{4\pi K a}$$

$$\delta T_{s2} = \text{Re} \left(\frac{P_0}{4\pi K a} e^{j\Omega t} \right) = \frac{P_0}{4\pi K a} \cos \Omega t$$

Comme l'équation est linéaire, on peut superposer ces

$$\text{solutions: } \delta T_s = \frac{P_0}{4\pi K a} + \frac{P_0}{4\pi K a} \cos \Omega t$$

$$T_s = T_0 + \delta T_s = T_0 + \frac{P_0}{4\pi K a} (1 + \cos \Omega t)$$

On peut aussi raisonner par analyse d'ordre de grandeur et montrer que le terme en $\tau \frac{d}{dt} \delta T_s$ est négligeable.

Q19 $\delta \bar{T}_s = \frac{P_0}{4\pi a K} = 5,0^\circ \text{C}$

Q20 $D_g = \frac{K}{c_g}$ est le coefficient de diffusion thermique du gel. $\frac{1}{\Omega} = \frac{T}{2\pi}$ où T est la période.

$r_{th} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{D_g T}$ est la longueur de diffusion associée à la durée T . Analogie : longueur de peau dans un conducteur ohmique.

Q 21 Si $r \rightarrow a$, $T \rightarrow T_s$ donc

$$T_0 + \frac{\alpha}{a} (1 + \cos \pi t) = T_0 + \frac{P_0}{4\pi K a} (1 + \cos \pi t)$$

$$\boxed{\alpha = \frac{P_0}{4\pi K}}$$

Q 22 On moyenne sur t : $\langle T - T_0 \rangle = \frac{\alpha}{r} \left(1 - \frac{r_{th}}{r}\right)$

Puis on moyenne sur la sphère :

$$\overline{\delta T} = \langle T - T_0 \rangle = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi(r_{th}^3 - a^3)} \int_a^{r_{th}} 4\pi r^2 dr \langle T - T_0 \rangle$$

$$= \frac{1}{\frac{4}{3}\pi(r_{th}^3 - a^3)} \times 4\pi \int_a^{r_{th}} r^2 \frac{\alpha}{r} dr$$

$$= \frac{3\alpha}{r_{th}^3 - a^3} \left(\frac{r_{th}^2 - a^2}{2} \right)$$

Comme $a \ll r_{th}$,

$$\boxed{\overline{\delta T} \simeq \frac{3}{2} \frac{\alpha}{r_{th}} = \frac{3}{8\pi} \frac{P_0}{r_{th} K} \quad \overline{\delta T} = 0,29^\circ\text{C}}$$

Q 23 Utiliser une méthode interférométrique, par exemple en plaçant l'échantillon sur un bras d'un Michelson, et un gel de poudre de particules d'or sur l'autre. Cela nécessite que le gel soit transparent.