PC* 26 - DEVOIR N° 8

corrigé

Pendule de Foucault

corrigé

1. Le pendule oscille dans le plan contenant la droite $(O, \vec{u}_z)$ et la position initiale de la corde. Ce sera démontré plus loin mais il est d'usage de l'admettre. La masse du pendule est soumis à son poids et à la tension T de la corde. En projetant le PFD sur $\vec{e}_\theta$, on obtient l'équation du mouvement

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0 \quad .$$

2. Pour les petits mouvements, $\sin\theta \simeq \theta$ et on obtient l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{g/L}$.

$$\omega_0 = 0,382\,\text{rad.s}^{-1} \qquad \text{T}_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 16,4\,\text{s}$$

3. En projetant le PFD sur $\vec{u}_r$, on obtient $T = m(g\cos\theta - L\dot{\theta}^2)$. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit

$$\frac{1}{2}mL^2\dot{\theta}^2 - mgL\cos\theta = -mgL\cos\theta_0$$

ce qui permet d'éliminer $L\dot{\theta}^2$ pour trouver

$$T = mg(3\cos\theta - 2\cos\theta_0) \quad .$$

4. Comme $\Delta x = 4\,\text{m} \ll \text{L}$, l'angle θ est petit. Plus précisément, $\sin\theta_0 = \Delta x/L = 0,0597$ donne $\theta_0 \simeq 0,0597\,\text{rad} = 3,4\,°$. Dans ces conditions, $\cos\theta \simeq 1$ et $\cos\theta_0 \simeq 1$ donc $T \simeq mg$.

5.

$$L^2 = OM^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad z = -\sqrt{L^2 - x^2 - y^2} = -L\sqrt{1 - \frac{x^2+y^2}{L^2}} \simeq -L\left(1 - \frac{x^2+y^2}{L^2}\right)$$

En négligeant le terme du second ordre, on a $z \simeq -L$.

6.

$$\vec{T} = -T\vec{u}_{OM} = -T\overrightarrow{OM}/L = -T(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y - L\vec{u}_z)L = -T(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)/L + T\vec{u}_z$$

Comme on néglige le mouvement vertical, $\ddot{z} = 0$ et la projection verticale du PDF donne $T = mg$. Ainsi,

$$\overrightarrow{T} = -mg(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)/L + mg\vec{u}_z \qquad \vec{T} = -m\omega_0^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y) + mg\vec{u}_z \quad .$$

7. Le poids est dirigé selon $\vec{u}_z$. En projettant le PFD $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g}$ sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, on obtient

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad \ddot{y} + \omega_0^2 y = 0 \quad .$$

8. Les solutions de ces équations différentielles sont $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$ et $y(t) = C\cos(\omega_0 t) + D\sin(\omega_0 t)$. Compte tenu des conditions initiales $x(0) = x_0, y(0) = y_0, \dot{x}(0) = 0, \dot{y}(0) = 0$, on trouve $A = x_0$, $C = y_0$, $B = D = 0$.

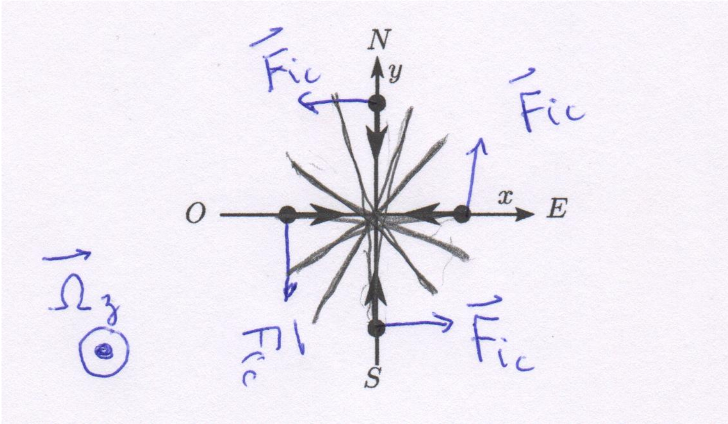
$$x(t) = x_0\cos(\omega_0 t) \quad y(t) = y_0\cos(\omega_0 t)$$

On a donc $\overrightarrow{OM} = -L\vec{u}_z + \cos(\omega_0 t)(x_0\vec{u}_x + y_0\vec{u}_y) = -L\vec{u}_z + \cos(\omega_0 t)\overrightarrow{OM}(0)$. Cela montre que la masse (et donc le fil) restent toujours dans le plan défini par O, $\vec{u}_z$ et la position initiale.

9. $\vec{\Omega} = \Omega\sin\lambda\,\vec{u}_z + \Omega\cos\lambda\,\vec{u}_y$

10. À l'équateur, $\lambda = 0$ et la vitesse initiale est de la forme $v_0\,\vec{u}_y$, donc $\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = \Omega\,\vec{u}_y \wedge v_0\,\vec{u}_y = \vec{0}$: la force de Coriolis est nulle et l'a pas d'effet.

11.



12. Figure ci-dessus

13.

$$\vec{v} = \dot{x}\vec{u}_x + \dot{y}\vec{u}_y \qquad \vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v} = 2m\Omega\left(\dot{y}\sin\lambda\,\vec{u}_x - \dot{x}\,\sin\lambda\,\vec{u}_y + \dot{x}\cos\lambda\,\vec{u}_z\right)$$

14. Dans le référentiel Terrestre non galiléen, le PFD s'écrit $m\vec{a} = \vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}_{ic}$ (la force d'inertie d'entraînement est prise en compte dans la valeur locale de $\vec{g}$). En projetant sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, on obtient directement les équations fournies par l'énoncé

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - 2\Omega\sin\lambda\,\dot{y} = 0 \qquad (1)$$
$$\ddot{y} + \omega_0^2 y + 2\Omega\sin\lambda\,\dot{x} = 0 \quad . \qquad (2)$$

15. La combinaison $(1) + i(2)$ des deux relations précédentes donne

$$\ddot{x} + i\ddot{y} + \omega_0^2(x + iy) + 2\Omega\sin\lambda(i\dot{x} - \dot{y}) = 0$$

Or $(i\dot{x} - \dot{y}) = i(\dot{x} + i\dot{y}) = i\dot{u}$, donc

$$\ddot{u} + 2i\Omega\sin\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = 0 \quad .$$

16. Pour résoudre cette équation différentielle linéaire, on utilise la technique de l'équation caractéristique, qui s'écrit ici

$$r^2 + 2i\Omega\sin\lambda r + \omega_0^2 = 0$$

$$\Delta = -4\Omega^2\sin^2\lambda - 4\omega_0^2 = -4(\omega_0^2 + \Omega^2\sin^2\lambda) \simeq -4\omega_0^2 \qquad r_{1/2} = -i\Omega\sin\lambda \pm i\omega_0\lambda$$

$$u(t) = Ar^{r_1 t} + Be^{r_2 t} = e^{-i\Omega\sin\lambda t}\left(Ae^{i\omega_0 t} + Be^{-i\omega_0 t}\right)$$

17. Les conditions initiales s'écrivent $u(0) = x_0$ et $\dot{u}(0) = 0$, c'est à dire

$$A + B = x_0 \qquad i(\omega_0 - \Omega\sin\lambda)A - i(\omega_0 + \Omega\sin\lambda)B = 0$$

et on en déduit

$$A = \frac{\omega_0 + \Omega\sin\lambda}{2\omega_0}x_0 \qquad B = \frac{\omega_0 - \Omega\sin\lambda}{2\omega_0}x_0 \quad .$$

$$u = \frac{x_0}{2\omega_0}\left((\omega_0 + \Omega\sin\lambda)e^{i\omega_0 t} + (\omega_0 - \Omega\sin\lambda)e^{-i\omega_0 t}\right)e^{-i\Omega\sin\lambda t}$$

$$u = x_0\left(\cos(\omega_0 t) + i\frac{\Omega\sin\lambda}{\omega_0}\sin\omega_0 t\right)^{-i\Omega\sin\lambda t}$$

18. En négligeant le second terme, on trouve

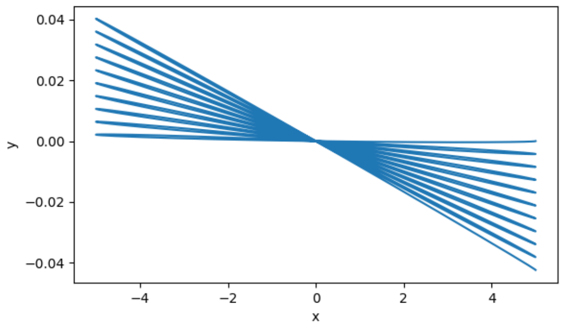
$$x = \mathrm{Re}(u) = x_0\cos(\omega_0 t)\cos(\Omega\sin\lambda t) \quad y = \mathrm{Im}(u) = -x_0\cos(\omega_0 t)\sin(\Omega\sin\lambda t) \quad .$$

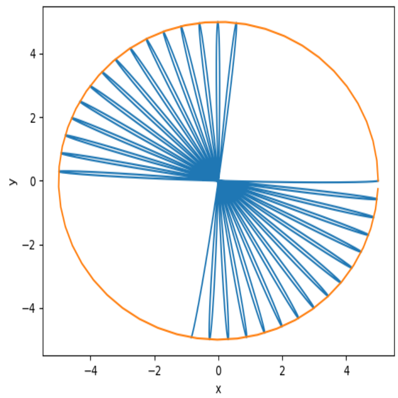
$$\overrightarrow{O_1M} = x\,\vec{u}_x + y\vec{u}_y = x_0\cos(\omega_0 t)(\cos(\Omega\sin\lambda t)\vec{u}_x - \sin(\Omega\sin\lambda t)\vec{u}_y) \quad \overrightarrow{O_1M} = \cos(\omega_0 t)\,\vec{u}(t)$$

où $\vec{u}(t)$ est le vecteur unitaire défini par $\vec{u}(t) = (\cos(\Omega\sin\lambda t)\vec{u}_x - \sin(\Omega\sin\lambda t)\vec{u}_y)$.

19. Si $\vec{u}(t)$ était constant, $\overrightarrow{O_1M}$ resterait colinéaire à une direction fixe, la masse du pendule se déplacerait sur une droite et la corde resterait dans le plan défini par O, O_1 et $\vec{u}$. Mais ici, $\vec{u}$ évolue dans le temps : il forme avec l'axe (O_1x) l'angle $-\Omega\sin\lambda t$, c'est à dire qu'il tourne à la vitesse angulaire $\Omega\sin\lambda$ dans le sens horaire (si on regarde le pendule depuis le haut). La période associée est $2\pi/(\Omega\sin\lambda) \simeq 1,4\,\text{jour}$, très inférieure à la période propre $T_0 = 16,4\,\text{s}$. Si on observer la pendule pendant quelques oscillations, on a l'impression qu'il reste dans un même plan. Mais si on l'observe plusieurs heures, on perçoit l'évolution de $\vec{u}$ et le fait que le plan d'oscillation tourne peu à peu.

Les figures ci-dessous représentent ce mouvement. À gauche, le déplacement obtenu après une dizaine d'oscillations, pour une durée d'environ 3 minutes, d'amplitude $x_0 = 5\,\text{m}$ n'est que de $4\,\text{cm}$ selon $\vec{u}_y$. À droite, j'ai utilisé une valeur artificiellement élevée de Ω pour mieux comprendre ce qui se passe.

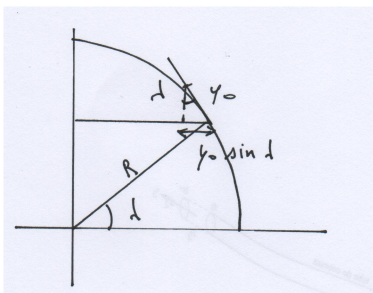




20. Dans le référentiel géocentrique, il n'existe pas de force d'inertie et le pendule oscille dans un plan fixe.

21. Dans la $\mathcal{R}_{\text{geo}}$, l'observateur entraîné par la Terre tourne vers l'est, de sorte qu'il a l'impression que le pendule tourne en sens inverse. Au départ, le pendule oscille le long du méridien de Greenwich, mais au bout d'une heure il oscillera selon un méridien situé plus à l'ouest, à une longitude d'environ 15 degrés (360/24).

22. Entraîné par la Terre, O_1 tourne autour de l'axe des pôles sur un cercle de rayon $R\cos\lambda$ et possède dans $\mathcal{R}_{geo}$ la vitesse $\vec{v}_1 = R\Omega\cos\lambda\,\vec{u}_x$.



Quand le pendule passe par ce point, il possède, selon la loi de composition des vitesses, la vitesse $\vec{v}_0' = \vec{v}_0 + \vec{v}_1 = v_0\,\vec{u}_y + R\Omega\cos\lambda\,\vec{u}_x$.

23. Le nouveau point coïncidant tourne sur un cercle de rayon $R\cos\lambda - y_0\sin\lambda$ et sa vitesse est

$$\vec{v}_2 = (R\cos\lambda - y_0\sin\lambda)\Omega\,\vec{u}_x \quad .$$

24. Dans $\mathcal{R}_{\text{geo}}$, la composante de la vitesse colinéaire à $\vec{u}_x$ se conserver pendant le déplacement du pendule, donc $v_x(t_0) = R\Omega\cos\lambda$.

$$\Delta v_x = v_x(t_0) - v_{2x} = y_0\Omega\sin\lambda$$

C'est la vitesse relative de la masse par rapport au point du sol O_2 au dessus duquel le pendule se trouve lorsqu'il atteint son élongation maximale.

L'idée est la suivante : lorsque le pendule se trouve en O_1, l'entraînement par la rotation de la Terre le « lance » vers l'est avec la vitesse v_1. Lorsqu'il arrive en O_2, il a conservé cette vitesse, mais O_2 se déplace moins vite que O_1. Au lieu de suivre le méridien, le pendule va se décaler vers l'est en arrivant en y_0.

25.

$$\frac{\Delta v_x}{y_0} = \Omega\sin\lambda$$

On retrouve la vitesse de rotation de la question 18.

Déviation d'un projectile
corrigé

1. Dans R_T supposé galiléen, le projectile de masse m n'est soumis qu'à son poids et le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g},$$

ce qui donne en projection :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

Les conditions initiales sont : $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$, $\dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha$, $\dot{y}(0) = 0$, $\dot{z}(0) = v_0 \sin\alpha$. Par intégration, on obtient :

$$x = v_0 \cos\alpha\, t, \quad y = 0, \quad z = -g\frac{t^2}{2} + v_0 \sin\alpha\, t.$$

Ce sont les équations paramétriques d'une parabole. Pour mieux le voir, on peut remplacer t par $\frac{x}{v_0 \cos\alpha}$ dans l'expression de y :

$$y = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 d} + x \tan\alpha.$$

Le projectile est au sol pour $y = 0$, ce qui donne $x = 0$ (point de départ) ou

$$x = x_F \quad \text{avec} \quad x_F = \frac{2v_0^2 \cos\alpha \sin\alpha}{g} = \frac{v_0^2 \sin 2d}{g} = 35,34\,\text{m}.$$

On peut mener le calcul en cherchant la date de contact avec le sol : $t_F = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$.

2. Le référentiel terrestre est en rotation autour de l'axe des pôles par rapport au référentiel géocentrique. Il n'est donc pas galiléen et on doit, pour une étude dynamique dans R_T, introduire les forces d'inertie d'entraînement et de Coriolis.* Rappelons que l'effet de la force d'inertie d'entraînement est pris en compte dans la valeur locale de g.

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega \wedge \vec{v} \quad \text{avec} \quad \vec{\Omega} = \Omega\cos\lambda\,\vec{u}_y + \Omega\sin\lambda\,\vec{u}_z \quad .$$

La période de rotation est de 23 h 56 min, donc

$$\Omega = \frac{2\pi}{T} = 7,29 \cdot 10^{-5}\,\text{rad.s}^{-1}.$$

Le vecteur $\vec{v} = v_x\,\vec{u}_x + v_y\,\vec{u}_y + v_z\,\vec{u}_z$ est inconnu et ses composantes dépendent du temps.

Le principe fondamental s'écrit : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} + \vec{F_{ic}}$ et, après développement du produit vectoriel, se projette en :

$$\begin{cases} \frac{dv_x}{dt} = 2\Omega v_y \sin\lambda - 2\Omega v_z \cos\lambda \\ \frac{dv_y}{dt} = -2\Omega v_x \sin\lambda \\ \frac{dv_z}{dt} = -g + 2\Omega v_x \cos\lambda \end{cases}$$

On doit résoudre un système différentiel de trois équations couplées. Numériquement, $g = 9.81\,\text{m.s}^{-2}$ alors que les termes en Ωv_i sont au plus de l'ordre de $\Omega v_0 = 1.5 \cdot 10^{-3}\,\text{m.s}^{-2}$. On sait aussi par expérience que l'effet de la force de Coriolis est petit, ce qui incite à un calcul approximatif par une technique de perturbation. Si $\Omega = 0$, $F_{ic} = 0$ et on retrouve le calcul de la question 1 avec

$$v_x = v_0 \cos\alpha \quad v_y = 0 \quad v_z = v_0 \sin\alpha - gt \quad .$$

Le calcul perturbatif consiste à utiliser cette expression approchée de la vitesse dans le membre de droite du système différentiel. Pour plus de rigueur, je vais utiliser la notation mathématique « petit o » dans le début du calcul. Puisque les expressions ci-dessus sont une limite pour $\Omega \to 0$, on a

$$v_x = v_0 \cos\alpha + o(\Omega^0) \quad v_y = 0 + o(\Omega^0) \quad v_z = v_0 \sin\alpha - gt + o(\Omega^0)$$

En reportant dans le système différentiel on obtient

$$\begin{cases} \dfrac{dv_x}{dt} = -2\cos\lambda\Omega(v_0\sin\alpha - gt) + o(\Omega) \\ \dfrac{dv_y}{dt} = -2\Omega\sin\lambda v_0\cos\alpha + o(\Omega) \\ \dfrac{dv_z}{dt} = -g + 2\Omega\cos\lambda v_0\cos\alpha + o(\Omega) \quad . \end{cases}$$

Dorénavant, je n'écris plus les $o()$ et il est entendu que je néglige les termes en Ω^2, Ω^3, ... En intégrant la troisième équation on obtient

$$v_z = (2\Omega\cos\lambda\cos\alpha v_0 - g)t + v_0\sin\alpha$$

$$\boxed{z = -(g - 2\Omega\cos\lambda\cos\alpha v_0)\frac{t^2}{2} + v_0\sin\alpha t} \quad .$$

En intégrant les projections sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ on obtient

$$x = -2\Omega\cos\lambda\left(v_0\sin\alpha\frac{t^2}{2} - \frac{gt^2}{2}\right) \qquad y = -\Omega\sin\lambda\cos\alpha v_0 t^2 \quad .$$

Le point de chute est défini par $z = 0$, ce qui donne :

$$t_F = \frac{2v_0\sin\alpha}{g - 2v_0\cos\lambda\cos\alpha} = \frac{2v_0\sin\alpha}{g\left(1 - \frac{2v_0\Omega\cos\alpha\cos\lambda}{g}\right)} \qquad t_F \simeq \frac{2v_0\sin\alpha}{g}\left(1 + \frac{2v_0\Omega\cos\alpha\cos\lambda}{g}\right)$$

$$t_F \simeq \frac{2v_0\sin\alpha}{g} + \frac{4v_0^2\Omega\sin\alpha\cos\alpha\cos\lambda}{g^2} \quad .$$

Les coordonnées du point de chute sont $x(t_F)$ et $y(t_F)$. En négligeant les termes du second ordre en Ω, on obtient :

$$y_F = -\frac{v_0^3}{g^2}\Omega\sin\lambda\cos\alpha\sin^2\alpha$$

$$x_F = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} + \frac{\Omega v_0^3\cos\lambda}{g^2}\left(2\sin 2\alpha\cos\alpha - \frac{4}{3}\sin^3\alpha\right)$$

Numériquement : $y_F = -0,93\,\text{mm}$ (légère déviation vers le Sud).
Par rapport à 1), x_F est augmenté de 5,7 mm.

1

Excitation paramétrique d'un pendule

1. La tige possède un moment d'inertie $m_t \frac{l^2}{3}$ par rapport à (Ay). On peut le négliger si : $m_t \frac{l^2}{3} \ll m l^2$.

Alors le moment cinétique du pendule se confond avec celui de M. Il faut aussi que M soit quasi-ponctuelle, i.e. que cette boule possède un rayon très inférieur à l.

2. Par rapport à (Ay), le pendule possède le moment cinétique

$$L_{Ay} = (\vec{AM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{u}_y = (l\vec{n} \wedge l\dot{\theta}\vec{\tau}) \cdot \vec{u}_y = ml^2\dot{\theta}$$

Comme le pivot en A est sans dissipation, le moment des actions d'axe par rapport à (Ay) est nul. Le TMC appliqué au pendule dans R_0 s'écrit : $ml^2\ddot{\theta} = (\vec{AM} \wedge m\vec{g}) \cdot \vec{u}_y$

$$ml^2\ddot{\theta} = (l\vec{n} \wedge mg\vec{u}_z) \cdot \vec{u}_y$$

$$ml^2\ddot{\theta} = -mgl\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0} \quad \text{avec } \omega_0^2 = g/l$$

3. $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 0,89 \text{ s}$

4. Si h dépend du temps, A se déplace dans R_0. Plaçons-nous dans le référentiel $(A, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ en translation par rapport à R_0. Le point M est soumis à la force d'inertie d'entraînement

$$\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}(A/R_0) = -m\ddot{h}\vec{u}_z.$$

$$\vec{F}_{ie} + m\vec{g} = m(g - \ddot{h})\vec{u}_z$$

Par rapport à la question précédente, il suffit donc de remplacer g par $g - \ddot{h} = g(1-G)$.

2

L'équation du mouvement s'écrit donc

$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}(1-G)\sin\theta = 0$ $\boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 (1-G)\sin\theta = 0}$

(5) Dans R_1, on applique le PFD au pendule constitué de la tige et de la masse.

$m\vec{a} = m\vec{g} - m\ddot{h}\,\vec{u}_z + \vec{R}$

$\vec{R} = m(\vec{a} - g\vec{u}_z + \ddot{h}\vec{u}_z)$

$\vec{R} = m(\vec{a} + g(G-1)\vec{u}_z)$ avec $\vec{a} = l\ddot{\theta}\,\vec{\tau} - l\dot{\theta}^2\vec{n}$

$R_\theta = \vec{R}.\vec{\tau} = m(\underbrace{l\ddot{\theta} + g(1-G)\sin\theta}_{0 \text{ d'après } 4)})$ $R_\theta = 0$

La force $\vec{R}$ est selon $\vec{n} = \vec{u}_r$. On aurait donc obtenu le même résultat en raisonnant avec un fil souple exerçant la tension $\vec{T} = -T\vec{u}_r$ sur la boule. Comme la tige est de masse nulle, elle exerce $-\vec{T}$ sur A et pour compenser, le solide (1) exerce $\vec{T}$ sur A. Calculer $\vec{R}$ ou la tension du fil revient au même !

$\vec{R} = (\vec{R}.\vec{u}_r)\vec{u}_r = m(-l\dot{\theta}^2 - g(1-G)\cos\theta)\,\vec{u}_r$

$\boxed{\vec{R} = -mg\left[(1-G)\cos\theta + U\right]\vec{u}_r}$ car $l\dot{\theta}^2 = l\omega_0^2 U = gU$

L'énoncé demande une réponse dans R_0 alors que cette force ne dépend pas du référentiel ! La réponse attendue est sans doute la projection sur $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$.

Comme $\vec{u}_r = \cos\theta\,\vec{u}_z + \sin\theta\,\vec{u}_x$,

$\boxed{R_x = -mg\sin\theta\left[(1-G)\cos\theta + U\right] \quad R_z = -mg\cos\theta\left[(1-G)\cos\theta + U\right]}$

6.
$$\boxed{\vec{R} = mg \begin{vmatrix} (G-1)\,\theta\,\vec{u}_x \\ \left(-U + (G-1)(1-\theta^2)\right)\vec{u}_z \end{vmatrix}}$$

DL à l'ordre 1. 3

$U = \dfrac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$ est d'ordre 2.

7. La force $\vec{R}$ s'exerce sur le point A ; sa puissance est $P(t) = \vec{R}\cdot\vec{v}_A = \vec{R}\cdot\dot{h}\,\vec{u}_z$

$$\boxed{P(t) = mg\dot{h}\left((G-1)(1-\theta^2) - U\right)}$$

8. $P(t) = -mg\,\Omega a \cos(\Omega t+\phi)\left(\theta^2 - 1 - U\right)$ $\quad U = \dfrac{\dot{\theta}^2}{\omega_0^2}$

$= mg\,\Omega a\cos(\Omega t+\phi)\left(A^2\sin^2\omega_0 t - 1 - A^2\cos^2\omega_0 t\right)$

$$\underline{P(t) = -mg\,\Omega a\cos(\Omega t+\phi)\left(A^2\cos(2\omega_0 t) + 1\right)}$$

9. $P(t) = -mg\,\Omega a A^2\left(\dfrac{1}{2}\cos\left((\Omega+2\omega_0)t+\phi\right) + \dfrac{1}{2}\cos\left((2\omega_0-\Omega)t-\phi\right) + 1\right.$

$\left. + \cos(\Omega t+\phi)\right)$

Le premier et le troisième sont sinusoïdaux. Leur moyenne est vraisemblablement nulle. Pour en être sûr, il faudrait connaître Ω puisque la moyenne se calcule sur la durée T_0. L'énoncé est mal formulé ! Le second terme est constant si $2\omega_0 - \Omega = 0$ i.e. $\Omega = 2\omega_0$, $k = 2$. Contrairement à ce qui dit l'énoncé, c'est $P(t)$ qui comporte un terme constant, pas P_m !

Dans ce cas $P_m = -\dfrac{mg}{2}\Omega a A^2\cos\phi$

$$\boxed{P_m = -mg\,\omega_0 A^2\cos\phi}$$

L'amplitude des oscillations croît si le pendule gagne de l'énergie, i.e. si $P_m > 0$.

4 L'optimum est atteint si $\phi = \pi$

f⇕g!i(g,w↔å↔û!

$$\boxed{\mathcal{P}_m^{\,*} = m g\, \omega_0\, a\, A^2}$$

10. Le terme négligé est $\mathcal{P}' = mg\,G(1-\theta^2)\dot{h} = m\ddot{h}(1-\theta^2)\dot{h}$

$$\mathcal{P}' = -m\Omega^2 a \sin(\Omega t+\phi)\left(1 - A^2\sin^2\omega_0 t\right)\Omega a \cos(\Omega t+\phi)$$

En développant, il apparait :

- un terme en $\sin(\Omega t+\phi)\cos(\Omega t+\phi) = \frac{1}{2}\sin(2\Omega t + 2\phi)$, de moyenne nulle
- un terme en $\sin(\Omega t+\phi)\cos(\Omega t+\phi)\sin^2\omega_0 t$

$$\propto \sin(2\Omega t+\phi)(1-\cos 2\omega_0 t)$$

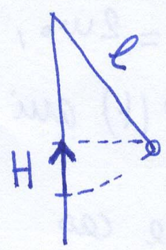
$$\propto \sin 2\Omega t - \frac{1}{2}\sin(2\Omega t + 2\omega_0 t + \phi) - \frac{1}{2}\sin(2\Omega t - 2\omega_0 t - \phi)$$

$$\propto \sin(4\omega_0 t) - \frac{1}{2}\sin(6\omega_0 t+\phi) - \frac{1}{2}\sin(2\omega_0 t - \phi)$$

La moyenne de chaque terme est nulle. Le terme négligé ne change donc rien à la valeur moyenne.

11. Raisonnons dans R_1 où le pendule est suspendu à un point fixe. Exprimons son énergie mécanique.

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \qquad \mathcal{E}_p = mg H = mg\,\ell(1-\cos\theta)$$



On néglige le travail de F_{ie}, en cohérence avec l'hypothèse $G \ll 1$.

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 + mg\ell(1-\cos\theta)$$

Pour les petits mouvements, $\theta \simeq A \sin\omega_0 t$ et $1-\cos\theta \simeq \dfrac{\theta^2}{2}$ 5

$$\mathcal{E}m = \frac{1}{2} m \ell^2 A^2 \omega_0^2 \cos^2\omega_0 t + mg\ell \frac{A^2}{2} \sin^2 \omega_0 t$$

Comme $\ell = g\,\omega_0^2$, $\mathcal{E}m = \dfrac{1}{2} m\ell^2 A^2 \omega_0^2 (\cos^2\omega_0 t + \sin^2\omega_0 t)$

$$\mathcal{E}m = \frac{1}{2} m \ell^2 A^2 \omega_0^2 = mg\ell \frac{A^2}{2}$$

Si le pendule n'était pas excité, $\mathcal{E}m$ serait constant.

À cause de la puissance $\mathcal{P}$, $\mathcal{E}m$ peut augmenter

Considérons le système formé du pendule et du pivot. La puissance $\mathcal{P}$ est intérieure, elle ne dépend pas du référentiel.

Le théorème de l'énergie mécanique appliqué entre t et $t+T_0$ donne :

$$\mathcal{E}_m(t+T_0) - \mathcal{E}_m(t) = \int_t^{t+T_0} \mathcal{P}(t)\,dt = \mathcal{P}_m^* T_0$$

$$\frac{mg\ell}{2} \frac{A^2(t+T_0) - A^2(t)}{T_0} = \mathcal{P}_m^*.$$

Comme A varie peu pendant un période :

$$\frac{mg\ell}{2} \frac{dA^2}{dt} = mg\omega_0 a A^2 \qquad \frac{dA^2}{dt} = \frac{2a}{\ell}\omega_0 A^2$$

En résolvant cette éq diff : $A^2(t) = A^2(0)\, e^{\frac{2a\omega_0 t}{\ell}}$

$$A(t) = A(0)\, e^{\frac{a\omega_0 t}{2\ell}}$$

$$\frac{T_0}{\tau_A} = \frac{2\pi}{\omega_0} \times \frac{a\omega_0}{\ell}$$

$$\boxed{\tau_A = \frac{\ell}{a\omega_0} \qquad \frac{T_0}{\tau_A} = \frac{2\pi a}{\ell}}$$

12. Entre $\dfrac{t_1}{T_0} = 11$ et $\dfrac{t_2}{T_0} = 21$, $\dfrac{\theta}{\pi}$ passe, en amplitude, de 0,025 à 0,09.

$$\frac{A_0\, e^{t_1/\tau_A}}{A_0\, e^{t_2/\tau_A}} = \frac{0{,}09}{0{,}025} = 3{,}6$$

6

$$\exp\left(\frac{t_2-t_1}{\tau_A}\right) = 3,6 \qquad \exp\left(\frac{10\,T_0}{\tau_A}\right) = 3,6$$

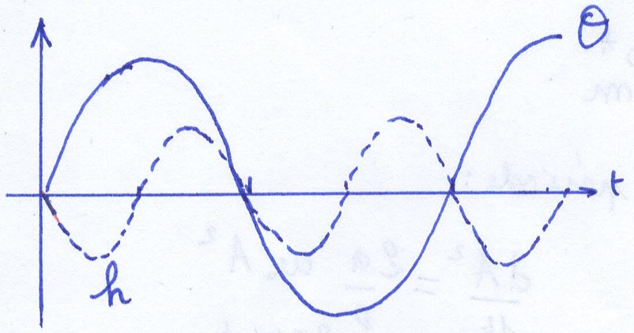
Y
UU"Y#h

$$\frac{T_0}{\tau_A} = \frac{1}{10}\ln 3,6 \qquad \boxed{\frac{T_0}{\tau_a} = 0,13}$$

13. Pendant la durée T_0, A augmente d'un facteur $e^{\frac{T_0}{\tau_a}} = 1,13$, c'est à dire de 13 %. On peut considérer qu'il change peu, H_τ est valide.

14. Quand θ grandit, les termes d'ordre supérieurs à 2 négligés depuis la question 6 prennent de l'importance. La puissance P_m est moins grande, voire devient négative : l'amplitude tend donc à décroître.

15. $\theta = \theta_0 \sin \omega_0 t \qquad h = a \sin(2\omega_0 t + \pi) = -a \sin \omega_0 t$



Quand θ passe par 0, h ~~augmente~~.
Quand θ passe par 0, h augmente.

Il convient donc de racourcir la corde lorsque le pendule passe en bas, et l'allonger quand le pendule est à son élongation maximale. Ex : grand encensoir de St Jacques de Compostelle.

Suite du pb : stabilisation du pendule inversé par vibration de A.