

PC* 26 - DEVOIR N° 8

corrigé

Échanges thermiques d'un fuselage d'avion

1) cf cours

2) On applique le 1^{er} principe à l'espace de section Σ compris entre les abscisses x et $x+dx$.

Pendant dt , il reçoit $\delta Q = j(x) \Sigma dt - j(x+dx) \Sigma dt$.

Comme le régime est stationnaire, $dU = 0$.

Le 1^{er} principe $dU = \delta Q$ devient donc

$$\Sigma dt (j(x) - j(x+dx)) = 0 \quad \frac{dj}{dx} = 0$$

Comme $j = -\lambda \frac{dT}{dx}$, on en déduit $\boxed{\frac{d^2 T}{dx^2} = 0}$

3) $T(x) = Ax + B$ par intégration.

Pour $x=0$, $T = T_{int}$ donc $B = T_{int}$.

On exprime la continuité de j en $x=e$:

$$-\lambda \frac{dT}{dx}(e) = h(T_{ext} - T_A) \quad \text{avec } T_{ext} = Ae + B$$

$$-\lambda A = h(Ae + B - T_A) \quad B = T_{int}$$

$$A = \frac{h(T_A - T_{int})}{\lambda + h e}$$

$$T = \frac{h(T_A - T_{int})}{\lambda + h e} x + T_{int}$$

4) $T_{ext} = T(e)$ donne

$$\boxed{T_{ext} = \frac{h e T_A + \lambda T_{int}}{\lambda + h e}}$$

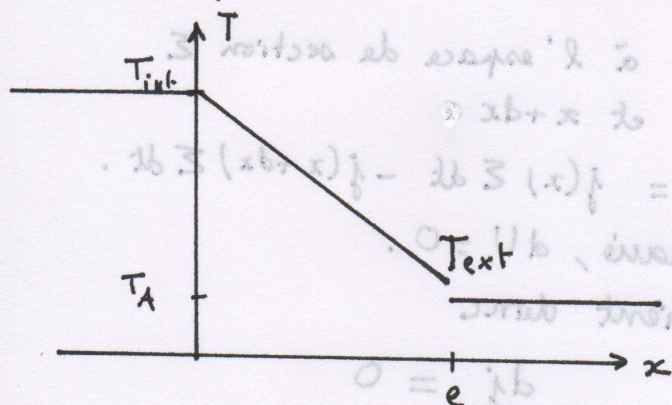
5) Unités si : $\lambda : W.m^{-1}.K^{-1}$ $h : W.m^{-2}.K^{-1}$ $e : m$

Donc Bi est sans dimension.

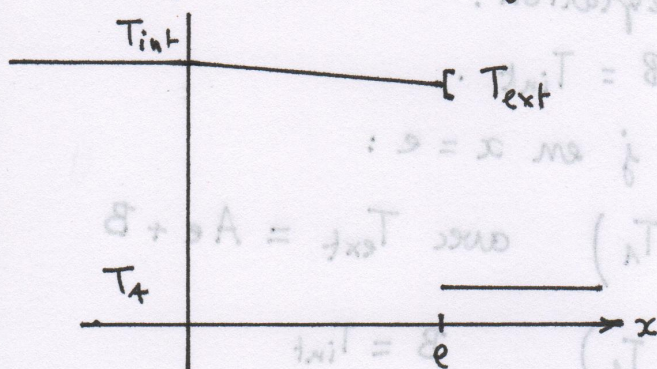
$$\boxed{T_{ext} = \frac{Bi T_A + T_{int}}{Bi + 1}}$$

C'est la moyenne pondérée de T_A et T_{int} .

2) 6) Si $Bi \gg 1$, $T_{ext} \approx T_A$. La discontinuité de température à l'interface est petite



Si $Bi \ll 1$, $T_{ext} \approx T_{int}$. La discontinuité de température est forte.



Le nombre de Biot compare l'efficacité de l'échange conducto-convectif vers l'air et de l'échange conductif dans le solide.

- Si $Bi \gg 1$, l'échange conducto-convectif est le plus efficace; l'air impose pratiquement sa température à l'interface.
- Si $Bi \ll 1$, l'échange conductif est le plus efficace; la face interne impose pratiquement sa température à la face externe.

$$T_{ext} = \frac{Bi T_A + T_{int}}{Bi + 1}$$

3

7) $Bi = 200$ $T_{ext} = 220,4 \text{ K}$

On est dans le cas $Bi \gg 1$ où l'air extérieur impose sa température.

8) Dans la question 3, on a trouvé $T = Ax + B$ avec $B = T_0$, donc $T_{ext} = Ae + T_{int}$ et $A = \frac{T_{ext} - T_{int}}{e}$.

$$j = -\lambda \frac{dT}{dx} = -\lambda A = \lambda \frac{T_{int} - T_{ext}}{e}$$

Le flux traversant le fuselage de gauche à droite est

$$\phi = j \Sigma = \frac{\lambda \Sigma}{e} (T_{int} - T_{ext})$$

La résistance thermique du fuselage est définie par

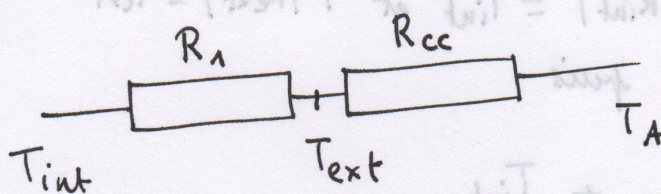
$$\phi = \frac{1}{R_1} (T_{int} - T_{ext})$$

$$R_1 = \frac{e}{\lambda \Sigma}$$

9) La loi de Newton s'écrit $\phi_{cc} = h \Sigma (T_{ext} - T_A)$.

On identifie $G_{cc} = h \Sigma$ et $R_{cc} = \frac{1}{h \Sigma}$

10)



La relation du pont diviseur de tension s'écrit

$$T_{ext} - T_A = \frac{R_{cc}}{R_{cc} + R_1} (T_{int} - T_A)$$

$$T_{ext} = \frac{R_{cc} T_{int} + R_1 T_A}{R_{cc} + R_1}$$

On remarque que $Bi = \frac{R_1}{R_{cc}}$

donc

$$T_{ext} = \frac{T_{int} + Bi T_A}{1 + Bi}$$

4

1. On considère la matière comprise entre les rayons r et r' avec $R_{int} \leq r < r' \leq R_{ext}$. Pendant dt , elle reçoit

$$\delta Q = j(r) \times 2\pi r L dt - j(r') \times 2\pi r' L dt$$

En régime permanent, $dU = 0$. Le premier principe s'écrit

donc $2\pi r L j(r) = 2\pi r' L j(r')$.

Il existe donc une constante ϕ telle que :

$$\forall r \in [R_1, R_2], \quad 2\pi r L j(r) = \phi$$

Cette constante est le flux traversant vers l'extérieur un cylindre quelconque.

$$j(r) = \frac{\phi}{2\pi r L} \quad \text{et} \quad j(r) = -\lambda \frac{dT}{dr} \quad \text{donc}$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{-\phi}{2\pi L \lambda r} \quad T = A \ln r + B$$

avec $A = \frac{-\phi}{2\pi L \lambda}$

Les conditions de bord $T(R_{int}) = T_{int}$ et $T(R_{ext}) = T_{ext}$ permettent de trouver A et B puis

$$T = \frac{T_{ext} - T_{int}}{\ln R_{ext}/R_{int}} \ln \frac{r}{R_{int}} + T_{int}$$

2. $\phi = -2\pi L \lambda A$

$$\phi = \frac{2\pi L \lambda (T_{int} - T_{ext})}{\ln R_{ext}/R_{int}}$$

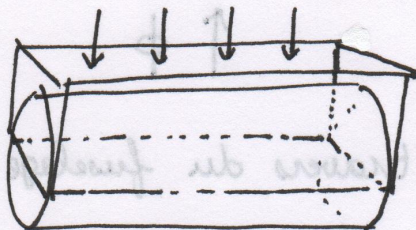
3. La résistance thermique du fuselage est définie par

$$\phi = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_2} \quad \text{donc}$$

$$R_2 = \frac{\ln R_{ext}/R_{int}}{2\pi L \lambda}$$

$$\underline{R_2 = 4,87 \cdot 10^{-3} \text{ K} \cdot \text{W}^{-1}}$$

4. Le flux solaire reçu par l'avion est celui qui traverse le rectangle de longueur L et de largeur $2R_{\text{ext}}$.



$$P_s = 2 R_{\text{ext}} L \varepsilon \varphi_s$$

5. Le fuselage émet, selon la loi de Stefan, le flux $2\pi R_{\text{ext}} L \sigma T_{\text{ext}}^4$ et il reçoit $2\pi R_{\text{ext}} L \sigma T_{\text{MA}}^4$.

La puissance nette reçue est donc

$$P_r = 2\pi R_{\text{ext}} L \sigma (T_{\text{MA}}^4 - T_{\text{ext}}^4)$$

6. Un corps noir absorbe tout rayonnement qui parvient à sa surface, quelle que soit sa longueur d'onde, sa direction et sa polarisation.

Le rayonnement solaire se trouve essentiellement dans le visible et le proche infrarouge. Dans ce domaine spectral, l'avion ne se comporte pas comme un corps noir puisque son absorbanse est $\varepsilon = 0,25 < 1$.

D'après la loi de Wien, le rayonnement émis par le fuselage se concentre autour de $\lambda_{\text{max}} = \frac{W}{T_{\text{ext}}} = 11,6 \mu\text{m}$.

Les longueurs d'onde émises sont donc dans un intervalle spectral éloigné du visible. Il est ainsi acceptable de supposer que le fuselage se comporte comme un corps noir pour le rayonnement qu'il émet, alors qu'il n'absorbe que partiellement le rayonnement solaire.

6

7. La surface externe reçoit P_s et P_r depuis l'extérieur, elle reçoit

ϕ depuis l'intérieur au travers du fuselage, et perd $\phi_{cc} = h (T_{ext} - T_A)$ vers l'air.

À l'équilibre, $P_s + P_r + \phi - \phi_{cc} = 0$

$$2 R_{ext} L \varphi_s \varepsilon + 2 \pi R_{ext} L \sigma (T_{NA}^4 - T_{ext}^4) + \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_2} - h \times 2 \pi R_{ext} L (T_{ext} - T_A) = 0$$

$$\boxed{\frac{\varepsilon \varphi_s}{\pi} + \sigma (T_{NA}^4 - T_{ext}^4) + \frac{1}{R_{ext} \ln \frac{R_{ext}}{R_{int}}} \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_2} - h (T_{ext} - T_A) = 0}$$

8. $\phi = \frac{T_{int} - T_{ext}}{R_2} \quad \phi = 12 \text{ kW}$

$$\phi_{cc} = 612 \text{ kW}$$

$$P_r = 485 \text{ kW}$$

$$P_s = 118 \text{ kW}$$

La conduction au travers du fuselage est négligeable. L'équilibre se joue essentiellement dans les échanges avec l'atmosphère, l'air extérieur et le rayonnement solaire.

Accéléromètre pendulaire

1. En agitant mon propre bras, j'estime que la vitesse de ma main peut passer de 0 à 3 m.s^{-1} en $0,1 \text{ s}$, d'où une accélération de $\underline{30 \text{ m.s}^{-2} = 3g}$ pour un mouvement rapide.

Pour un mouvement lent, je ne vois pas de limite inférieure. Si v passe de 0 à 1 m.s^{-1} en 1 s ,

$$\underline{a = 1 \text{ m.s}^{-2} = 0,1 g}$$

Les valeurs fournies par le constructeur encadrent donc toutes les valeurs utiles au joueur.

2. On raisonne dans le référentiel R' lié au boîtier.

Il est en translation accélérée dans R et n'est pas galiléen. On fait intervenir la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = -m\vec{a}$.

L'équation du mouvement de la masse d'épreuve s'écrit

$$m\ddot{X} = -kX - 2m\gamma\dot{X} + \vec{F}_{ie} \cdot \vec{u}_x$$

$$\boxed{\ddot{X} + 2\gamma\dot{X} + \omega_r^2 X = -a(t)}$$

3. Une solution particulière de l'éq. diff est $X = -\frac{a}{\omega_r^2}$.

Les solutions de l'équation homogène dépendent du signe de $\Delta = 4(\gamma^2 - \omega_r^2)$.

2

- si $\gamma < \omega_r$ $\Delta < 0$

l'équation caractéristique admet pour solutions

$$\lambda = -\gamma \pm i\sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2} \quad \text{soit } \Omega = \sqrt{\omega_r^2 - \gamma^2}$$

$$X(t) = e^{-\gamma t} \left(A \cos \Omega t + B \sin \Omega t \right) - \frac{a}{\omega_r^2}$$

- si $\gamma > \omega_r$ $\Delta > 0$

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2} \quad \text{2 racines négatives}$$

$$X(t) = A e^{r_1 t} + B e^{r_2 t} - \frac{a}{\omega_r^2}$$

4. Dans le premier cas, comme $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\gamma t} = 0$,

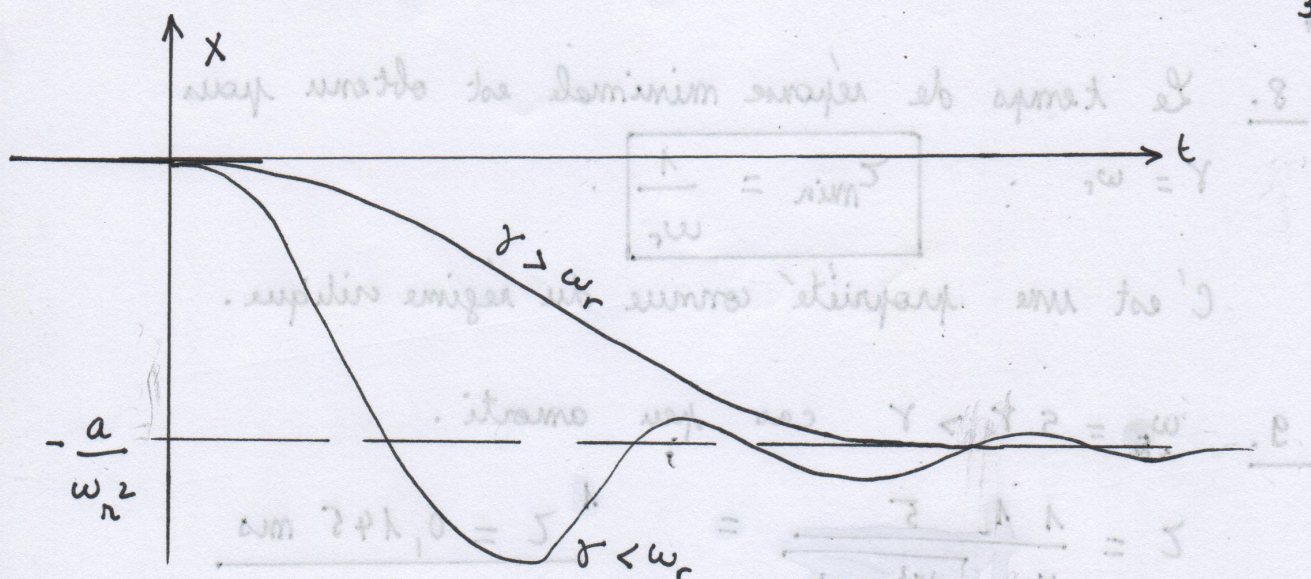
$$X(t) \rightarrow -\frac{a}{\omega_r^2}$$

Dans le second cas, comme r_1 et r_2 sont négatifs,

$A e^{r_1 t}$ et $B e^{r_2 t}$ tendent vers 0. Donc à nouveau

$$X(t) \rightarrow -\frac{a}{\omega_r^2}$$

3

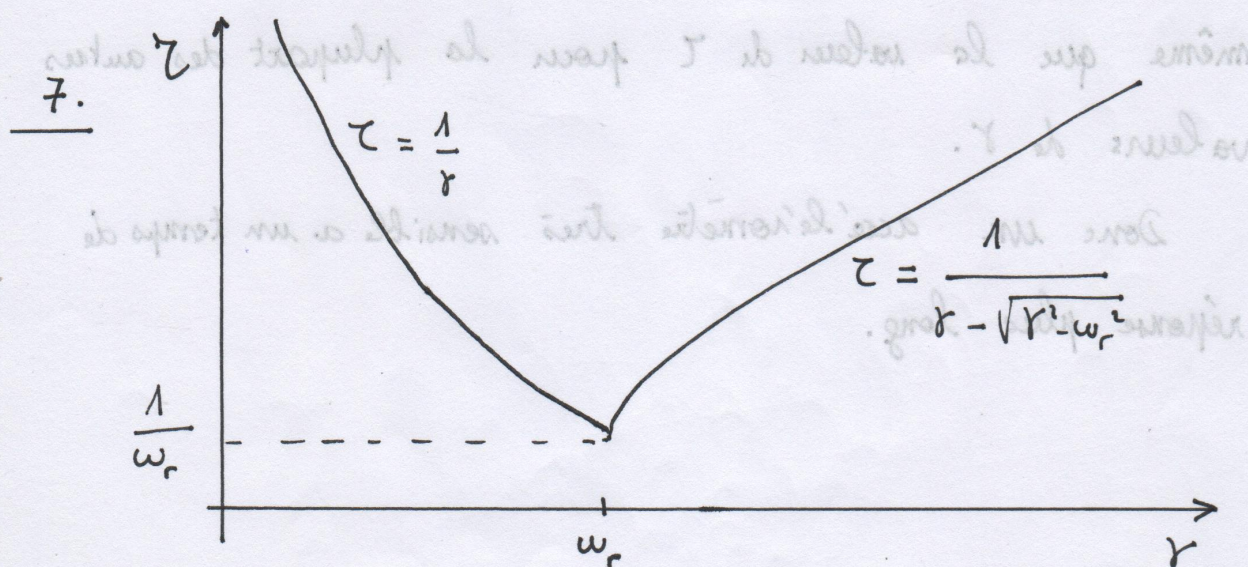


On a soit un régime aperiódique, soit un régime pseudo périodique.

6. - si $\gamma < \omega_r$, le temps de réponse est $\tau = \frac{1}{\gamma}$

- si $\gamma > \omega_r$, le temps de réponse est

$$\tau = \frac{1}{\min(|\gamma_1|, |\gamma_2|)} = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega_r^2}}$$



4

8. Le temps de réponse minimale est obtenu pour

$$\gamma = \omega_r \quad \boxed{\tau_{\min} = \frac{1}{\omega_r}}$$

C'est une propriété connue du régime critique.

9. $\omega_r = 5\gamma > \gamma$ cas peu amorti.

$$\tau = \frac{1}{\gamma} = \frac{5}{\omega_r} \quad \underline{\tau = 0,145 \text{ ms}}$$

$$X_{\lim} = -\frac{a}{\omega_r^2} \quad \text{donne} \quad \underline{X_{\lim} = -8,2 \text{ mm}}$$

10. Augmenter la sensibilité signifie augmenter X_{\lim} pour une valeur donnée de a . Pour cela, il faut donc abaisser la valeur de ω_r .

Si on abaisse ω_r , le point minimal de la courbe de la question 7 s'élève : τ_{\min} augmente, de même que la valeur de τ pour la plupart des autres valeurs de γ .

Donc un accéléromètre très sensible a un temps de réponse plus long.

5

11. En projection sur \vec{u} , l'équation du mouvement devient

$$m \ddot{X} = - 2m\gamma \dot{X} - kX - m \vec{a} \cdot \vec{u} + m \vec{g} \cdot \vec{u}$$

$$\ddot{X} + 2\gamma \dot{X} + \omega_r^2 X = - (\vec{a} - \vec{g}) \cdot \vec{u}$$

Par rapport à la question 2., on voit que l'appareil mesure désormais $(\vec{a} - \vec{g}) \cdot \vec{u}$.

S'il est en chute libre, $\vec{a} = \vec{g}$ et il donne un signal nul!

12. $\dot{\underline{X}} = j\omega \underline{X} \quad \ddot{\underline{X}} = (j\omega)^2 \underline{X}$

L'équation du mouvement devient en notation complexe:

$$(-\omega^2 + 2\gamma j\omega + \omega_r^2) \underline{X}_m e^{j\omega t} = -a_m e^{j\omega t}$$

$$\boxed{\underline{X}_m = \frac{-a_m}{\omega_r^2 - \omega^2 + 2\gamma j\omega} = \frac{-a_m / \omega_r^2}{1 + \frac{2\gamma}{\omega_r} j\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega^2}{\omega_r^2}}}$$

13. Comportement de type passe-bas: si $\omega \rightarrow \infty$, $\underline{X}_m \rightarrow 0$

et si $\omega \rightarrow 0$, $\underline{X}_m \approx -\frac{a_m}{\omega_r^2}$ donc $\underline{X} = -\frac{a_m}{\omega_r^2} e^{j\omega t}$.

$$X(t) = \text{Re}(\underline{X}) = -\frac{a_m}{\omega_r^2} \cos \omega t.$$

$$X(t) = -\frac{1}{\omega_r^2} a(t)$$

L'élongation est proportionnelle à $a(t)$ à basse fréquence. (i.e. pour $\omega \ll \omega_r$).

6

Précisons ce que l'on entend par « classe fréquence ».

Il faut vérifier: $\omega_r^2 \gg \omega^2$ et $\omega_r^2 \gg \gamma \omega$

Donc $\omega \ll \min(\omega_r, \frac{\omega_r^2}{\gamma})$

Avec $\frac{\omega_r}{\gamma} = 5$, on obtient $\frac{\omega_r^2}{\gamma} = 5\omega_r$ donc le domaine

base fréquence est défini par $\omega \ll \omega_r$

14. Notons $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$ $\underline{X}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$

$$X(t) = \text{Re}(\underline{X}) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

Donc $X_m = |\underline{X}_m|$ représente l'amplitude du mouvement.

$$\underline{X}_m = \frac{-\frac{a_m}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + j\gamma \frac{\omega}{\omega_r^2}} \quad \gamma = \frac{\omega_r}{Q}$$

$$= \frac{-\frac{a_m}{\omega_r^2}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_r^2} + 2j \frac{\omega}{Q \omega_r}}$$

$$\frac{X_m}{a_m/\omega_r^2} = \frac{1}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 4 \frac{x^2}{Q^2}}}$$

En étudiant $f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{4x^2}{Q^2}$, on voit

que l'expression possède un extrémum pour

$$x = \sqrt{1 - \frac{2}{Q^2}}$$

, ce qui correspond à une

résonance pour $f_0 = f_n \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$

Pour $Q = 5$, $f_0 = 0,96 f_n = 5,28 \text{ kHz}$

Si la fréquence f s'approche de f_0 , l'amplitude X_m augmente et n'est plus proportionnelle à a .

Il faut éviter ce comportement dans l'utilisation de l'accéléromètre. Noter qu'avec le bras d'un joueur de Vitesse, on aura toujours $f \ll 1 \text{ kHz}$.

Enroulement sur un cylindre tournant

1. Par rapport à la situation initiale, la partie du fil située entre I_0 et I est venue se plaquer contre le cylindre; elle a pour longueur $R\theta$ donc

$$\ell = \ell_0 - R\theta$$

2.

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM} = R\vec{u}_r + \ell\vec{u}_\theta = R\vec{u}_r + (\ell_0 - R\theta)\vec{u}_\theta$$

3. On calcule $\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ en se rappelant que

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{u}_r$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}\vec{u}_\theta - (\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{u}_r \quad \boxed{\vec{v} = -(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{u}_r}$$

4. On procède à une nouvelle dérivation. Comme le résultat est fourni par l'énoncé, il convient d'être particulièrement méticuleux et de ne pas sauter d'étape.

$$\begin{aligned} \vec{a} &= R\ddot{\theta}\vec{u}_r - (\ell_0 - R\theta)\ddot{\theta}\vec{u}_r - (\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= [R\ddot{\theta} - (\ell_0 - R\theta)\ddot{\theta}]\vec{u}_r - (\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}^2\vec{u}_\theta \end{aligned}$$

5. Le référentiel \mathcal{R}' est en rotation dans \mathcal{R} galiléen et non pas translation rectiligne uniforme. Il n'est donc pas galiléen.

6. La force d'inertie d'entraînement est donnée par $\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 \overrightarrow{HM}$ où H est le projeté orthogonal de M sur l'axe de rotation. Ici, $H = O$ donc $\overrightarrow{HM} = \overrightarrow{OM}$ exprimé dans la question 2.

$$\vec{F}_{ie} = m\Omega^2 [R\vec{u}_r + (\ell_0 - R\theta)\vec{u}_\theta]$$

7. La force de Coriolis est donnée par $\vec{F}_{ic} = -2m\vec{\Omega} \wedge \vec{v}$. L'énoncé a attribué une valeur positive à Ω alors que la rotation se fait dans le sens horaire, donc $\vec{\Omega} = -\Omega\vec{u}_z$. Le calcul du produit vectoriel donne

$$\vec{F}_{ic} = -2m\Omega(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

8. Dans \mathcal{R}' , le principe fondamental de la dynamique s'écrit $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_{ie} + \vec{F}_{ic}$. Le poids $m\vec{g}$ et la réaction \vec{N} du plan support sont dirigés selon \vec{u}_z . En projetant cette relation sur \vec{u}_r , on obtient

$$\begin{aligned} m[R\dot{\theta}^2 - (\ell_0 - R\theta)\ddot{\theta}] &= m\Omega^2 R \\ -\frac{d}{dt}((\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}) &= R\Omega^2 \\ \frac{d}{dt}(\ell\dot{\theta}) &= -R\Omega^2 \quad . \end{aligned}$$

9. La relation de la question précédent s'intègre en

$$(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta} = -R\Omega^2 t + C \quad .$$

À $t = 0$, $\theta = 0$ et le point matériel est fixe dans \mathcal{R}' donc son vecteur vitesse est nul, ce qui indique que $\dot{\theta}(0) = 0$. On en déduit $C = 0$ et

$$\ell_0\dot{\theta} - R\theta\dot{\theta} = -R\Omega t \quad .$$

Une nouvelle intégration fournit

$$\ell_0\theta - \frac{1}{2}R\theta^2 = -R\Omega\frac{t^2}{2} + E$$

Les conditions initiales donnent $E = 0$ d'où l'équation du second degré en θ :

$$R\theta^2 - 2\ell_0\theta - R\Omega^2 t^2 = 0 \quad .$$

10. L'équation précédente possède les solution

$$\frac{\ell_0 \pm \sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2}}{R} \quad .$$

On cherche pour θ une solution qui s'annule à $t = 0$, donc

$$\theta = \frac{\ell_0 - \sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2}}{R}$$

On remarque que $\theta < 0$ contrairement à ce que le dessin de l'énoncé fait apparaître. Cela signifie que le fil *se déroule* ; la longueur de IM croît au fil du temps.

11. La date t_1 est définie par $\theta(t_1) = -2\pi$. En résolvant cette équation, on obtient par un calcul simple

$$t_1 = \frac{2\pi}{\Omega} \sqrt{1 + \frac{\ell_0}{\pi R}} = 7,0 \text{ s} \quad .$$

12. La tension du fil est colinéaire à IM , elle est de la forme $\vec{T} = -T\vec{u}_\theta$ avec $T > 0$. En projetant sur \vec{u}_θ le principe fondamental de la dynamique écrit dans \mathcal{R}' , on obtient

$$\begin{aligned} -m(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta}^2 &= -T - 2m\Omega(\ell_0 - R\theta)\dot{\theta} + m\Omega^2(\ell_0 - R\theta) \\ \text{puis } T &= m(\ell_0 - R\theta)(\Omega^2 + \dot{\theta}^2 - 2\Omega\dot{\theta}) = m(\ell_0 - R\theta)(\Omega - \dot{\theta})^2 \quad . \end{aligned}$$

Comme

$$\ell_0 - R\theta = \sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2} \quad \dot{\theta} = -\frac{R\Omega^2 t}{\sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2}}$$

on obtient finalement

$$T = m\sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2} \Omega^2 \left(1 + \frac{R\Omega t}{\sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t^2}}\right)^2$$

13. Pour faciliter l'application numérique, on peut remarque que, par définition de t_1 ,

$$\sqrt{\ell_0^2 + R^2\Omega^2 t_1^2} = \ell_0 + 2\pi R$$

Ainsi,

$$T(t_1) = m(\ell_0 + 2\pi R)\Omega^2 \left(1 + \frac{R\Omega t}{\ell_0 + 2\pi R}\right)^2 = 0,39 \text{ N}$$

Comme $T(t_1) > T_{\text{rup}}$, le fil se casse avant d'avoir effectué un tour complet.