PC* — mathématiques **jeudi 4 décembre 2025**
Devoir surveillé n° 4 **durée : 4 heures**

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1

On considère une matrice symétrique réelle M de taille 2

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$

On suppose que b n'est pas nul.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on considère la matrice de rotation $\mathrm{R}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

Question 1. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, montrer que $\mathrm{R}(\theta)\mathrm{R}(\varphi) = \mathrm{R}(\theta + \varphi)$.

Question 2. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, en déduire que $\mathrm{R}(\theta)$ est inversible et préciser son inverse.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose alors $\mathrm{B}(\theta) = \mathrm{R}(\theta)^{-1}\mathrm{M}\mathrm{R}(\theta)$.

Question 3. Trouver deux constantes u et v telles que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, les coefficients non diagonaux de la matrice $\mathrm{B}(\theta)$ soient égaux à $u\cos(2\theta) + v\sin(2\theta)$.

Question 4. Justifier l'existence de w et φ dans $\mathbb{R}$ tels que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad u\cos(2\theta) + v\sin(2\theta) = w\cos(2\theta - \varphi).$$

Question 5. En déduire que la matrice M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Question 6. Vérifier que les espaces propres de M sont orthogonaux entre eux.

Problème 2

On pose $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Soit $\mathrm{A} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{A}^3 + \mathrm{A} = 0$ et $\mathrm{A} \neq 0$.

Le but de ce problème est de justifier que A est semblable à B dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Question 7. On note f l'endomorphisme $\mathrm{U} \mapsto \mathrm{AU}$ de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$. Vérifier que $f^2 = -\mathrm{Id}_{\mathrm{Im}(\mathrm{A})}$.

Question 8. En appliquant le déterminant, en déduire que $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$ est de dimension paire puis préciser sa dimension.

Question 9. Soit V un élément non nul de $\mathrm{Im}(\mathrm{A})$. On pose $\mathrm{W} = \mathrm{AV}$. Montrer que la famille (V, W) est libre.

Question 10. Soit U un vecteur non nul de $\mathrm{Ker}(\mathrm{A})$. Montrer que la famille $(\mathrm{U}, \mathrm{V}, \mathrm{W})$ est libre.

Question 11. Conclure.

Problème 3 — division euclidienne des polynômes

Présentation générale

On rappelle le *théorème de la division euclidienne pour les polynômes* : si U et V sont deux polynômes complexes, le polynôme V étant supposé non nul, alors il existe un unique couple $(\mathrm{Q},\mathrm{R}) \in \mathbb{C}[\mathrm{X}]^2$ tel que

$$\begin{cases} \mathrm{U} & = & \mathrm{VQ}+\mathrm{R} \\ \deg(\mathrm{R}) & < & \deg(\mathrm{V}). \end{cases}$$

Les polynômes Q et R sont alors respectivement appelés le *quotient* et le *reste* dans la division euclidienne du polynôme U par V.

Dans ce problème, on se donne un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un couple (A,B) d'éléments de $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ tels que

$$\deg(\mathrm{A}) \leqslant n, \quad \deg(\mathrm{B}) = n+1.$$

Pour tout élément P de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$, on note alors $\varphi(\mathrm{P})$ le reste dans la division euclidienne de AP par B.

Par exemple, si on choisit

$$n=2, \quad \mathrm{A}=\mathrm{X}^2, \quad \mathrm{B}=\mathrm{X}^3-\mathrm{X}, \quad \mathrm{P}=\mathrm{X}^2+\mathrm{X}+1,$$

la division euclidienne de AP par B s'écrit

$$\mathrm{AP}=\mathrm{X}^4+\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2=\mathrm{BQ}+\mathrm{R}, \quad \text{avec} \quad \mathrm{Q}=\mathrm{X}+1 \quad \text{et} \quad \mathrm{R}=2\mathrm{X}^2+\mathrm{X},$$

si bien que $\varphi(\mathrm{P}) = 2\mathrm{X}^2+\mathrm{X}$.

Partie I — généralités

Question 12. On considère deux polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. Par le théorème de la division euclidienne, il existe des couples $(\mathrm{Q}_1,\mathrm{R}_1)$ et $(\mathrm{Q}_2,\mathrm{R}_2)$ de $\mathbb{C}[\mathrm{X}] \times \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$ tels que

$$\mathrm{AP}_1 = \mathrm{BQ}_1+\mathrm{R}_1, \quad \mathrm{AP}_2 = \mathrm{BQ}_2+\mathrm{R}_2.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, montrer alors que $\varphi(\mathrm{P}_1+\lambda\mathrm{P}_2) = \mathrm{R}_1+\lambda\mathrm{R}_2$.

Question 13. En déduire que φ est linéaire.

Question 14. Justifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Partie II — étude d'un premier exemple

Dans cette partie uniquement, on choisit

$$n=2, \quad \mathrm{A}=\mathrm{X}^2+2\mathrm{X}, \quad \mathrm{B}=\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2-\mathrm{X}-1.$$

Question 15. Montrer que la matrice, notée M, de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$ dans la base $\mathcal{B}=(1,\mathrm{X},\mathrm{X}^2)$ est

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Question 16. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice M.

Question 17. En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de l'endomorphisme φ.

Question 18. Justifier que l'endomorphisme φ est diagonalisable. On précisera une base de diagonalisation de φ et la matrice diagonale qui lui est associée.

Partie III — étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie uniquement, on fixe $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ et on choisit

$$n = 2, \quad \mathrm{A} = \alpha \mathrm{X}^2 + \beta \mathrm{X} + \gamma, \quad \mathrm{B} = \mathrm{X}^3.$$

Question 19. Montrer que la matrice, notée M, de l'endomorphisme φ de $\mathbb{C}_2[\mathrm{X}]$ dans la base $\mathcal{B} = (1, \mathrm{X}, \mathrm{X}^2)$ est

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 \\ \beta & \gamma & 0 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Question 20. Montrer que l'endomorphisme φ est diagonalisable si et seulement si le polynôme A est constant.

Partie IV — étude du cas où B est scindé à racines simples

Dans cette partie, on ne suppose plus que n est égal à 2. On fixe des nombres complexes $x_0, \dots, x_n$ tous distincts et on choisit

$$\mathrm{B} = \prod_{k=0}^{n} (\mathrm{X} - x_k).$$

On note $(\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ la famille des polynômes de Lagrange associée à la liste $(x_0, \dots, x_n)$. On rappelle que ces polynômes sont donnés par

$$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad \mathrm{L}_k = \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq k}} \frac{\mathrm{X} - x_j}{x_k - x_j}.$$

Pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on note respectivement Q_k et R_k le quotient et le reste dans la division euclidienne de AL_k par B.

Question 21. Pour tout couple $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, montrer que

$$\mathrm{L}_k(x_\ell) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad k = \ell \\ 0 & \text{si} \quad k \neq \ell. \end{cases}$$

Question 22. Soit $\mathrm{P} \in \mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$. On pose

$$\mathrm{D} = \mathrm{P} - \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}(x_k) \mathrm{L}_k.$$

Pour tout $\ell \in [\![0, n]\!]$, évaluer $\mathrm{D}(x_\ell)$ et en déduire que D est le polynôme nul.

Question 23. En déduire que la famille $\mathcal{L} = (\mathrm{L}_0, \dots, \mathrm{L}_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[\mathrm{X}]$.

Question 24. Pour tout $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$, montrer que

$$\mathrm{R}_k(x_\ell) = \begin{cases} \mathrm{A}(x_k) & \text{si} \quad k = \ell \\ 0 & \text{si} \quad k \neq \ell. \end{cases}$$

Question 25. En déduire la matrice de l'endomorphisme φ dans la base de Lagrange $\mathcal{L}$.

Question 26. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Question 27. Préciser le spectre de φ et les espaces propres correspondants.

Problème 4

Pour tout couple (x, y) de nombres réels, on considère la matrice $\mathrm{P}_{x,y} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-x & 1+x \\ 1-y & 1+y \end{pmatrix}$ de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Question 28. Déterminer les valeurs propres de la matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ ainsi que les espaces propres associés.

Question 29. Quelles sont les valeurs de (x, y) pour lesquelles la matrice $\mathrm{P}_{x,y}$ est diagonalisable ?

Pour les trois prochaines questions, on fixe x et y dans $]-1, 1[$.

Question 30. Montrer qu'il existe un élément u de $]-1, 1[$ et une matrice U de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ tels que

$$\mathrm{U}^{-1}\mathrm{P}_{x,y}\mathrm{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u \end{pmatrix}.$$

Question 31. En déduire que la suite de matrices $(\mathrm{P}_{x,y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente. Sa limite est notée $\mathrm{L}_{x,y}$. Préciser le rang de cette matrice.

Question 32. Prouver l'égalité $\mathrm{L}_{x,y} = \dfrac{1}{2+x-y}\begin{pmatrix} 1-y & 1+x \\ 1-y & 1+x \end{pmatrix}$.

Pour la suite de ce problème, on fixe quatre éléments a, b, c, d de $]0, +\infty[$ et on pose $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Question 33. Exprimer le discriminant du polynôme caractéristique de la matrice A. Ce discriminant est noté Δ_{A}.

Question 34. Démontrer l'inégalité $\Delta_{\mathrm{A}} > 0$.

Question 35. En déduire que A possède deux valeurs propres réelles distinctes. Ces deux valeurs propres sont notées λ_1 et λ_2 avec la condition $\lambda_1 > \lambda_2$.

Question 36. Démontrer l'inégalité $\lambda_1 > |\lambda_2|$.

Question 37. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ_1 pour que la suite $(\mathrm{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède une limite. Cette limite est notée L dans la suite.

Question 38. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur λ_1 pour que L soit non nulle.

Question 39. Dans le cas où L existe et est non nulle, montrer que l'endomorphisme

$$f_{\mathrm{L}} : \mathrm{V} \mapsto \mathrm{L} \times \mathrm{V}$$

de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ est le projecteur sur l'espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_1}(\mathrm{A})$ parallèlement à l'espace propre $\mathrm{E}_{\lambda_2}(\mathrm{A})$.
