

Corrigé du devoir surveillé de mathématiques n° 4 — piste rouge

Question 1. Introduisons une notation pour les vecteurs de ces bases

$$\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n), \quad \mathcal{F} = (f_1, \dots, f_n), \quad \mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n).$$

Introduisons une notation pour les matrices concernées

$$A = M_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f), \quad B = M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g), \quad C = M_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f).$$

Soit $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. La j -ième colonne de C est

$$M_{\mathcal{G}}((g \circ f)(e_j)) = M_{\mathcal{G}}(g(f(e_j))), \quad \text{si bien que} \quad g(f(e_j)) = \sum_{i=1}^n c_{i,j} g_i.$$

Par ailleurs, la j -ième colonne de A est $M_{\mathcal{F}}(f(e_j))$, si bien que

$$f(e_j) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} f_k.$$

La linéarité de g donne

$$g(f(e_j)) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} g(f_k).$$

Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la k -ième colonne de B est $M_{\mathcal{G}}(g(f_k))$, si bien que

$$g(f_k) = \sum_{i=1}^n b_{i,k} g_i.$$

On en tire l'égalité

$$g(f(e_j)) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} \left(\sum_{i=1}^n b_{i,k} g_i \right) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} \right) g_i.$$

La famille $\mathcal{G}$ étant libre, on peut identifier les coefficients dans les deux décompositions de $g(f(e_j))$, ce qui donne

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j},$$

et ce pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

On a alors justifié l'égalité $C = B \times A$, c'est-à-dire $M_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(g \circ f) = M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(g) \times M_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$.

Question 2. On écrit $f = \text{Id} \circ f \circ \text{Id}$, ce qui donne

$$M_{\mathcal{F}, \mathcal{G}}(f) = M_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{Id}) \times M_{\mathcal{E}}(f) \times M_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{Id}).$$

Les matrices $M_{\mathcal{E}, \mathcal{G}}(\text{Id})$ et $M_{\mathcal{F}, \mathcal{E}}(\text{Id})$ représentent un automorphisme de $\mathbb{R}^n$ donc elles sont inversibles.

Question 3. Récurrence.

Question 4. Soit $\Pi = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un élément de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\Pi(M) = 0$.

Soit λ une valeur propre complexe de M et U un vecteur propre associé. D'après Q3, on trouve

$$\Pi(M)U = \sum_{k=0}^d a_k M^k U = \sum_{k=0}^d a_k \lambda^k U = P(\lambda)U.$$

La matrice $\Pi(M)$ est nulle donc $\Pi(\lambda)U$ est une colonne nulle. Le vecteur U n'est pas nul donc $\Pi(\lambda) = 0$.

Les valeurs propres complexes de M sont donc des racines de Π .

Question 5. Soit $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\Gamma_A(M_1 + \lambda M_2) = A \times (M_1 + \lambda M_2) = AM_1 + \lambda AM_2 = \Gamma_A(M_1) + \lambda \Gamma_A(M_2),$$

si bien que Γ_A est linéaire.

On sait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est stable par produit matriciel donc Γ_A est à valeurs dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Cette application est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 6. On suppose que A est inversible.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. L'inversibilité de A donne l'équivalence

$$MU = 0 \iff AMU = 0,$$

donc $\text{Ker}(M) = \text{Ker}(AM)$. Le théorème du rang donne alors

$$\text{rg}(AM) = n - \dim(\text{Ker}(AM)) = n - \dim(\text{Ker}(M)) = \text{rg}(M).$$

Ainsi, l'application Γ_A conserve le rang.

Question 7. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\Gamma_{A+\lambda B}(M) = (A + \lambda B)M = AM + \lambda BM = (\Gamma_A + \lambda \Gamma_B)(M),$$

donc $\Gamma(A + \lambda B) = \Gamma(A) + \lambda \Gamma(B)$. L'application Γ est linéaire.

Soit $A \in \text{Ker}(\Gamma)$. On a alors $\Gamma_A(I_n) = 0$, c'est-à-dire $A = 0$, si bien que Γ est injective.

Question 8. Récurrence.

Question 9. Soit $\Pi = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ un polynôme réel. La linéarité de Γ donne

$$\Gamma(\Pi(A)) = \sum_{k=0}^d a_k \Gamma(A^k).$$

Le résultat de la question 8 donne alors

$$\Gamma(\Pi(A)) = \sum_{k=0}^d a_k \Gamma(A)^k = \Pi(\Gamma(A)).$$

Question 10. On suppose que A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Il existe donc dans $\mathbb{R}[X]$ un polynôme Π scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, tel que $\Pi(A) = 0$.

La formule de la question 9 donne alors $\Pi(\Gamma_A) = 0$, si bien que Γ_A est diagonalisable.

Réciproquement, on suppose que Γ_A est diagonalisable. Il existe donc dans $\mathbb{R}[X]$ un polynôme Π scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples, tel que $\Pi(\Gamma_A) = 0$.

La formule de la question 9 donne alors $\Gamma(\Pi(A)) = 0$ or Γ est injective donc $\Pi(A) = 0$, si bien que A est diagonalisable dans $\mathbb{R}[X]$.

Question 11. Le même raisonnement qu'à la question 10 donne que tout polynôme annulateur de A est un polynôme annulateur de Γ_A et réciproquement.

Par le théorème de Cayley-Hamilton, le polynôme χ_A est un polynôme annulateur de A et χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de Γ_A .

On en déduit que χ_A est un polynôme annulateur de Γ_A et que χ_{Γ_A} est un polynôme annulateur de A .

Question 12. L'égalité $\chi_A(\Gamma_A) = 0$ donne l'inclusion $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(A)$.

L'égalité $\chi_{\Gamma_A}(A) = 0$ donne l'inclusion $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) \subset \text{Sp}_{\mathbb{C}}(\Gamma_A)$.

On en déduit que ces deux spectres sont égaux.

Question 13. Soient Θ et Θ' deux éléments de $\mathcal{L}_1$. Il existe des matrices P, Q, R, S de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\Theta = \Phi_{P,Q} \quad \text{et} \quad \Theta' = \Phi_{R,S}.$$

Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient alors

$$(\Theta \circ \Theta')(M) = PRMSQ,$$

si bien que $\Theta \circ \Theta' = \Phi_{PR,SQ}$, ce qui est un élément de $\mathcal{L}_1$.

Soient Θ et Θ' deux éléments de $\mathcal{L}_2$. Il existe des matrices P, Q, R, S de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\Theta = \Psi_{P,Q} \quad \text{et} \quad \Theta' = \Psi_{R,S}.$$

Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient alors

$$(\Theta \circ \Theta')(M) = PS^TMR^TQ,$$

si bien que $\Theta \circ \Theta' = \Phi_{PS^T,R^TQ}$, ce qui est un élément de $\mathcal{L}_1$.

Soient $\Theta \in \mathcal{L}_1$ et $\Theta' \in \mathcal{L}_2$. Il existe des matrices P, Q, R, S de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\Theta = \Phi_{P,Q} \quad \text{et} \quad \Theta' = \Psi_{R,S}.$$

Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on obtient alors

$$(\Theta \circ \Theta')(M) = PRM^TSQ,$$

si bien que $\Theta \circ \Theta' = \Psi_{PR,SQ}$, ce qui est un élément de $\mathcal{L}_2$.

On a alors prouvé que l'ensemble $\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2$ est stable par composition.

Question 14. Les applications $\Phi_{P,Q}$ et $\Psi_{P,Q}$ sont linéaires.

Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On observe les équivalences

$$\Phi_{P,Q}(M) = N \iff PMQ = N \iff M = P^{-1}NQ^{-1},$$

si bien que $\Phi_{P,Q}$ est bijective, avec $(\Phi_{P,Q})^{-1} = \Phi_{P^{-1},Q^{-1}}$.

Soient M et N deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On observe les équivalences

$$\Psi_{P,Q}(M) = N \iff PM^TQ = N \iff M^T = P^{-1}NQ^{-1} \iff M = (Q^T)^{-1}N^T(P^T)^{-1},$$

si bien que $\Psi_{P,Q}$ est bijective, avec $(\Psi_{P,Q})^{-1} = \Psi_{(Q^T)^{-1},(P^T)^{-1}}$.

Question 15. Notons Δ_A l'endomorphisme $M \mapsto MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on observe alors l'inclusion $\text{Im}(MA) \subset \text{Im}(M)$.

L'égalité $M = (MA)A^{-1}$ donne l'inclusion réciproque $\text{Im}(M) \subset \text{Im}(MA)$, si bien que $\text{Im}(M) = \text{Im}(MA)$ puis $\text{rg}(M) = \text{rg}(MA)$.

On a alors justifié que Δ_A préserve le rang. On rappelle que Γ_A préserve le rang aussi.

Rappelons enfin la notation $\mathcal{T}$ de l'énoncé pour désigner l'endomorphisme $M \mapsto M^T$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que $\mathcal{T}$ préserve le rang.

L'égalité $\Phi_{P,Q} = \Gamma_P \circ \Delta_Q$ montre que $\Phi_{P,Q}$ conserve le rang.

L'égalité $\Psi_{P,Q} = \Phi_{P,Q} \circ \mathcal{T}$ montre ensuite que $\Psi_{P,Q}$ conserve le rang aussi.

Question 16. *Analyse.* On suppose que $\Phi_{P,Q}$ conserve le déterminant. On a alors $\det(I_n) = \det(PI_nQ)$ donc $\det(P)\det(Q) = 1$.

Synthèse. On suppose que $\det(P)\det(Q) = 1$. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on trouve alors

$$\det(\Phi_{P,Q}(M)) = \det(PMQ) = \det(P)\det(M)\det(Q) = \det(M),$$

si bien que $\Phi_{P,Q}$ conserve le déterminant.

Ainsi, une condition nécessaire et suffisante pour que $\Phi_{P,Q}$ conserve le déterminant est $\det(P)\det(Q) = 1$.

Idem pour $\Psi_{P,Q}$ (dans la synthèse, on exploite le fait que la transposition conserve le déterminant).

Question 17. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Posons $N = \Phi_{P,P^{-1}}(M)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\chi_N(t) = \det(tI_n - PMP^{-1}) = \det(tPI_nP^{-1} - PMP^{-1}) = \det(P)\det(tI_n - M)\det(P)^{-1} = \chi_M(t).$$

On obtient donc $\chi_N = \chi_M$, ce qui prouve que $\Phi_{P,P^{-1}}$ conserve le polynôme caractéristique.

Posons maintenant $L = \Psi_{P,P^{-1}}(M)$. L'égalité $L = \Phi_{P,P^{-1}}(M^T)$ donne $\chi_L = \chi_{M^T}$.

Or on sait que la transposition conserve le polynôme caractéristique donc $\chi_L = \chi_M$, ce qui prouve que $\Psi_{P,P^{-1}}$ conserve le polynôme caractéristique.

Question 18. On remarque que $\mathcal{T} = \Psi_{I_n, I_n}$, si bien que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_2$.

Supposons que $\mathcal{T} \in \mathcal{L}_1$. Il existe donc deux matrices inversibles P et Q telles que

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M^T = PMQ.$$

Le choix $M = I_n$ donne $I_n = PQ$, si bien que $Q = P^{-1}$. On obtient alors

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad M^T P = PM.$$

Notons $E_{i,j}$ les matrices de la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on a alors

$$E_{j,i}P = PE_{i,j}.$$

La matrice $E_{j,i}P$ a toutes ses lignes nulles, sauf la j -ième ligne, égale à la i -ième ligne de P.

La matrice $PE_{i,j}$ a toutes ses colonnes nulles, sauf j -ième colonne, égale à la i -ième colonne de P.

L'égalité entre ces deux matrices donne $p_{i,j} = p_{j,i}$. Elle donne aussi que $p_{i,k}$ et $p_{k,i}$ sont nuls si k est différent de j .

Pour tout couple $(i, k) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on peut choisir $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $j \neq k$, si bien que $p_{i,k} = 0$.

Ainsi, la matrice P est nulle, ce qui contredit son inversibilité.

Cette contradiction prouve que $\mathcal{T}$ n'est pas un élément de $\mathcal{L}_1$.

Question 19. Soit f un éventuel élément de $\mathcal{L}_1 \cap \mathcal{L}_2$. Il existe alors des matrices inversibles P, Q, R, S telles que

$$f = \Phi_{P,Q} \quad \text{et} \quad f = \Psi_{R,S},$$

ce qui donne pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

$$PMQ = RM^T S \quad \text{puis} \quad M^T = R^{-1}PMQS^{-1}$$

donc $\mathcal{T} = \Phi_{R^{-1}P, QS^{-1}}$, ce qui contredit le résultat de Q18. Un tel élément f n'existe donc pas.

Les ensembles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont disjoints.

Question 20. On trouve $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = I_n$.

Question 21. L'espace vectoriel $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ est un supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans $\mathbb{R}^n$.

D'après le théorème du rang géométrique, l'application f induit un isomorphisme de F sur $\text{Im}(f)$, si bien que $(f(e_1), \dots, f(e_k))$ est une base de $\text{Im}(f)$.

En particulier, cette famille est libre.

Question 22. Le théorème du rang donne $k = n - \text{rg}(f)$. Par hypothèse, le rang de f est dans $\llbracket 1, n-1 \rrbracket$ donc k aussi.

Question 23. On trouve $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = \text{diag}(I_r, 0_{n-r})$.

Question 24. Notons $\mathcal{E}$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Considérons l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^n$ tel que $M_{\mathcal{E}}(f) = M$.

Comme on l'a vu dans les parties III.A et III.B (il manque le cas $r = 0$ mais celui-ci est immédiat), il existe des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^n$ telles que $M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) = J_{n,r}$.

D'après Q2, on en déduit l'existence de matrices P et Q de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $J_{n,r} = PMQ$, ce qui donne

$$M = P^{-1}J_{n,r}Q^{-1} = \Phi_{P^{-1}, Q^{-1}}(J_{n,r}).$$

Question 25. Notons a et b les endomorphismes de $\mathbb{R}^2$ représentés par A et B respectivement dans la base canonique $\mathcal{E}$. On a alors

Le théorème du rang donne $\dim(\text{Ker}(a)) = 1$. Prenons un vecteur e_2 tel que $\text{Ker}(a) = \text{Vect}(e_2)$ et complétons-le en une base $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Posons alors $f_1 = a(e_1)$, ce qui est un vecteur directeur de la droite $\text{Im}(a)$ comme en III.B.

Soit f_2 un vecteur directeur de $\text{Im}(b)$.

Les droites $\text{Im}(a)$ et $\text{Im}(b)$ sont distinctes donc la famille (f_1, f_2) est libre. C'est une famille libre de deux vecteur de $\mathbb{R}^2$ donc c'est une base $\mathcal{B}'$ de $\mathbb{R}^2$.

L'égalité $\text{Im}(b) = \text{Vect}(f_2)$ donne l'existence de deux nombres réels α et β tels que

$$b(e_1) = \alpha f_2, \quad b(e_2) = \beta f_2.$$

On obtient donc

$$M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(a) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(b) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

L'endomorphisme b n'est pas nul donc les nombres α et β ne sont pas tous deux nuls.

D'après Q2, il existe alors des matrices P et Q de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ telles que

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} Q \quad \text{et} \quad M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(b) = P \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} Q.$$

Question 26. La matrice de $\mathcal{T}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Question 27. L'application $\mathcal{T}$ est une symétrie ($\mathcal{T}^2 = \text{Id}$) donc

$$\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker}(\mathcal{T} + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(\mathcal{T} - \text{Id}),$$

ce qui justifie que $\mathcal{T}$ est diagonalisable.

Question 28. Ce rappel donne plus précisément $\text{Sp}(\mathcal{T}) = \{1, -1\}$. Les espaces propres correspondants sont

$$E_1(\mathcal{T}) = \mathcal{S}_2(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad E_{-1}(\mathcal{T}) = \mathcal{A}_2(\mathbb{R}).$$

Question 29. Le calcul donne

$$\Phi_{P,Q}(B_1) = \begin{pmatrix} ae & af \\ ce & cf \end{pmatrix}, \quad \Phi_{P,Q}(B_2) = \begin{pmatrix} ag & ah \\ cg & ch \end{pmatrix}, \quad \Phi_{P,Q}(B_3) = \begin{pmatrix} be & bf \\ de & df \end{pmatrix}, \quad \Phi_{P,Q}(B_4) = \begin{pmatrix} bg & bh \\ dg & dh \end{pmatrix}$$

donc

$$M_{\mathcal{B}_{\text{ca}}}(\Phi_{P,Q}) = \begin{pmatrix} ae & ag & be & bg \\ af & ah & bf & bh \\ ce & cg & de & dg \\ cf & ch & df & dh \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aQ^T & bQ^T \\ cQ^T & dQ^T \end{pmatrix}.$$

Question 30. Soit $M \in \text{Ker}(\Phi)$. On trouve $\text{rg}(M) = \text{rg}(\Phi(M)) = 0$ donc $M = 0$.

L'endomorphisme Φ est donc un endomorphisme injectif de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, qui est de dimension finie, donc Φ est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Question 31. Les matrices $B_1, B_4, B_1 + B_4$ sont de rang 1, 1, 2 respectivement. On a supposé que Φ conserve le rang donc les matrices $\Phi(B_1), \Phi(B_4), \Phi(B_1 + B_4)$ sont de rang 1, 1, 2 respectivement.

Supposons que $\text{Im}(\Phi(B_1)) = \text{Im}(\Phi(B_4))$. Remarquons l'égalité $\Phi(B_1 + B_4) = \Phi(B_1) + \Phi(B_4)$. L'inclusion

$$\text{Im}(\Phi(B_1) + \Phi(B_4)) \subset \text{Im}(\Phi(B_1)) + \text{Im}(\Phi(B_4)) = \text{Im}(\Phi(B_1))$$

donne alors l'inégalité $\text{rg}(\Phi(B_1 + B_4)) \leq \text{rg}(\Phi(B_1))$, c'est-à-dire $2 \leq 1$, ce qui est faux.

On en déduit que les images de $\Phi(B_1)$ et de $\Phi(B_4)$ sont distinctes.

Les hypothèses de Q25 sont vérifiées. Elles permettent d'introduire des matrices P_1 et Q_1 de $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ ainsi que deux nombres réels α, β non tous deux nuls tels que

$$P_1 \Phi(B_1) Q_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P_1 \Phi(B_4) Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Question 32. Les formules de Q31 donnent $C_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $C_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

Question 33. Soit $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$. Les endomorphismes Φ_{P_1, Q_1} et Φ préservent le rang donc la matrice $\Phi_{P_1, Q_1}(\Phi(B_i))$ est de rang 1. En particulier, son déterminant est nul. On sait que

$$\Phi_{P_1, Q_1}(\Phi(B_i)) = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \quad \text{donc} \quad a_i d_i - b_i c_i = 0.$$

Question 34. Remarquons pour commencer que Φ' conserve le rang.

Les matrices $B_1 + B_2$ et $B_1 + B_3$ sont de rang 1 donc leurs images $B'_1 + B'_2$ et $B'_1 + B'_3$ sont de rang 1 aussi. On remarque que

$$B'_1 + B'_2 = \begin{pmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de cette matrice est nul, ce qui donne

$$(1 + a_2)d_2 - b_2 c_2 = 0, \quad \text{c'est-à-dire} \quad d_2 + (a_2 d_2 - b_2 c_2) = 0.$$

Avec la relation de Q34, il vient $d_2 = 0$.

En remplaçant tous les indices 2 par des indices 3, un raisonnement identique donne $d_3 = 0$.

Question 35. Avec l'hypothèse $c_2 = 0$, il reste

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & b_3 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est triangulaire supérieure, ce qui donne

$$\det(\Phi') = b_2 c_3 d_4.$$

L'endomorphisme Φ' est bijectif donc $b_2 c_3 d_4 \neq 0$.

Question 36. La relation $b_3c_3 = 0$ issue de Q34 donne maintenant $b_3 = 0$. Il reste donc

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

On trouve en particulier

$$B'_3 + B'_4 = \begin{pmatrix} a_3 & 0 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice $B_3 + B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc la matrice $B'_3 + B'_4$ est de rang 1 aussi. Son déterminant vaut a_3d_4 or d_4 n'est pas nul donc a_3 est nul. Il reste donc

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

La matrice $B_2 + B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc la matrice $B'_2 + B'_4$ est de rang 1 aussi. On trouve

$$B'_2 + B'_4 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est nul donc $a_2d_4 = b_2c_4$.

La matrice $B_1 + B_2 + B_3 + B_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1 donc la matrice $B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4$ est de rang 1 aussi. On trouve

$$B'_1 + B'_2 + B'_3 + B'_4 = \begin{pmatrix} 1 + a_2 & b_2 \\ c_3 + c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Son déterminant est nul, ce qui donne

$$(1 + a_2)d_4 = b_2(c_3 + c_4).$$

En combinant avec l'égalité $a_2d_4 = b_2c_4$, il vient $d_4 = b_2c_3$.

En combinant ces deux égalités, il vient $a_2b_2c_3 = b_2c_4$. Comme b_2 n'est pas nul, il vient $a_2c_3 = c_4$.

Question 37. Les relations précédentes donnent finalement

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & a_2 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 & a_2c_3 \\ 0 & 0 & 0 & b_2c_3 \end{pmatrix}.$$

En posant $U = \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}$, on obtient donc $M' = \begin{pmatrix} U & 0 \times U \\ 0 \times U & c_3U \end{pmatrix}$.

Ainsi, d'après Q29, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & c_3 \end{pmatrix}$ et $Q = U^T$, on a $\Phi' = \Phi_{P,Q}$ puis $\Phi = \Phi_{P_1^{-1}, Q_1^{-1}} \circ \Phi_{P,Q}$, ce qui prouve que Φ est un élément de $\mathcal{L}_1$.

Question 38. L'endomorphisme Φ' envoie B_1, B_2, B_3, B_4 sur B'_1, B'_3, B'_2, B'_4 respectivement. Sa matrice dans la base $\mathcal{B}_{ca}$, notée M'' , est donc

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & b_2 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse $c_2 \neq 0$ alliée à l'égalité $b_2c_2 = 0$ de Q34 donne $b_2 = 0$ puis

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

Question 39. En tant que composé de deux automorphismes, l'endomorphisme $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est bijectif, donc la matrice M'' est inversible. Sa deuxième ligne est donc non nulle donc $b_3 \neq 0$.

L'égalité $b_3 c_3 = 0$ de Q34 donne alors $c_3 = 0$.

Question 40. Il reste

$$M'' = \begin{pmatrix} 1 & a_3 & a_2 & 0 \\ 0 & b_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_2 & c_4 \\ 0 & 0 & 0 & d_4 \end{pmatrix}.$$

On est ramené à la forme obtenue au début de Q36. Par le même raisonnement qu'en IV.C, on peut conclure que $\Phi' \circ \mathcal{T}$ est un élément de $\mathcal{L}_1$. On en déduit que Φ' est un élément de $\mathcal{L}_2$ puis que Φ est un élément de $\mathcal{L}_2$.

Question 41. La conservation du déterminant donne

$$\det(A) = \det(\Phi(A)) = 0$$

donc A n'est pas inversible donc $\text{rg}(A) < 2$. La matrice A n'est pas nulle donc $\text{rg}(A) > 0$ donc $\text{rg}(A) = 1$.

Question 42. On trouve

$$A + N = PQ \quad \text{donc} \quad \det(A + N) = \det(P) \det(Q) \neq 0.$$

On trouve par ailleurs $\Phi(A + N) = \Phi(A) + \Phi(N) = \Phi(N)$ puis

$$\det(A + N) = \det(\Phi(A + N)) = \det(\Phi(N)) = \det(N) = \det(P) \det(I_2 - J_{2,1}) \det(Q).$$

Le calcul matriciel donne

$$I_2 - J_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{puis} \quad \det(I_2 - J_{2,1}) = 0 \quad \text{puis} \quad \det(A + N) = 0.$$

Ces deux calculs se contredisent donc $\text{Ker}(\Phi)$ est réduit à $\{0\}$, si bien que Φ est injectif.

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est de dimension finie donc Φ en est un automorphisme.

Question 43. On sait que $\Phi(0) = 0$ donc Φ conserve le rang 0.

Puisque Φ conserve le déterminant, elle envoie toute matrice inversible sur une matrice inversible. Elle conserve donc le rang 2.

Elle envoie aussi toute matrice de rang 1 sur une matrice non inversible, qui est non nulle d'après Q42, donc Φ conserve aussi le rang 1.

Finalement, l'endomorphisme Φ conserve le rang.

Question 44. Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui préserve le déterminant. L'énoncé permet d'en déduire que Φ conserve le rang.

D'après la propriété admise à la fin de la partie IV, on en déduit que Φ est de la forme $\Phi_{P,Q}$ ou $\Psi_{P,Q}$ pour un certain couple (P, Q) de matrices de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$.

D'après Q16, ces matrices vérifient la relation $\det(P) \det(Q) = 1$.

Réciproquement, si Φ est de cette forme, on sait par Q16 que Φ conserve le déterminant.

Question 45. C'est du cours.

Question 46. Ça aussi.

Question 47. Une telle matrice vérifie en particulier l'égalité $\text{tr}(AA^T) = 0$ donc A est orthogonale à elle-même donc A est nulle.

Question 48. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On sait que son polynôme caractéristique est de la forme

$$X^n - \text{tr}(M)X^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-2} a_k(M)X^k + (-1)^n \det(M).$$

Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui préserve le polynôme caractéristique. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a alors $\chi_M = \chi_{\Phi(M)}$ donc, par unicité des coefficients d'un polynôme,

$$\text{tr}(M) = \text{tr}(\Phi(M)) \quad \text{et} \quad \det(M) = \det(\Phi(M)).$$

Un tel endomorphisme doit donc conserver la trace et le déterminant.

Question 49. *Analyse.* Soit Φ un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui préserve le polynôme caractéristique.

On a vu que Φ préserve le déterminant donc il existe deux matrices P et Q de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que $\det(P)\det(Q) = 1$ et

$$\Phi = \Phi_{P,Q} \quad \text{ou} \quad \Phi = \Psi_{P,Q}.$$

Premier cas. On suppose que $\Phi = \Phi_{P,Q}$, ce qui s'écrit

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = PMQ.$$

Comme Φ préserve la trace, on obtient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(M) = \text{tr}(PMQ) = \text{tr}(QPM).$$

Par linéarité de la trace, il vient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}((I_n - QP)M) = 0.$$

D'après Q47, on en déduit que $QP = I_n$, si bien que $Q = P^{-1}$ et $\Phi = \Phi_{P,P^{-1}}$.

Deuxième cas. On suppose que $\Phi = \Psi_{P,Q}$, ce qui s'écrit

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \Phi(M) = PM^T Q.$$

Comme Φ préserve la trace, on obtient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}(M) = \text{tr}(PM^T Q) = \text{tr}(QPM^T).$$

On connaît aussi l'identité $\text{tr}(M) = \text{tr}(M^T)$

Par linéarité de la trace, il vient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}((I_n - QP)M^T) = 0.$$

La transposition est un automorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ donc Par linéarité de la trace, il vient

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \text{tr}((I_n - QP)M) = 0.$$

D'après Q47, on en déduit que $QP = I_n$, si bien que $Q = P^{-1}$ et $\Phi = \Psi_{P,P^{-1}}$.

Synthèse. D'après Q17, les endomorphismes de la forme $\Phi_{P,P^{-1}}$ et $\Psi_{P,P^{-1}}$ préservent le polynôme caractéristique.
