

Chapitre 8 — suites de fonctions

Les espaces de fonctions ne sont pas de dimension finie. Il n'y a donc pas de manière canonique de définir la convergence d'une suite de fonctions. Ce chapitre présente deux modes de convergence.

1 Convergence simple

Suites de fonctions. Convergence simple. Exemples de comportements non satisfaisants.

2 Convergence uniforme

2.1 Définition

Définition. Exemples et contre-exemples.

Remarque : la convergence uniforme implique la convergence simple.

2.2 Théorème de continuité

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans \mathbb{K} . Soit f une fonction définie sur I , à valeurs dans \mathbb{K} .

Hypothèses :

- pour tout n dans \mathbb{N} , la fonction f_n est continue sur I ;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur I .

Conclusion : la fonction f est continue sur I .

Cas où la convergence uniforme n'a lieu que sur les segments.

2.3 Passage à la limite sous l'intégrale

Soient a et b dans \mathbb{R} tels que $a < b$. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{K} . Soit f une fonction définie sur le segment $[a, b]$, à valeurs dans \mathbb{K} .

Hypothèses :

- pour tout n dans \mathbb{N} , la fonction f_n est continue sur le segment $[a, b]$;
- la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction f sur le segment $[a, b]$.

Conclusion : la suite de terme général $\int_a^b f_n(t) dt$ converge vers le nombre $\int_a^b f(t) dt$.

2.4 Théorème de dérivation

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions définies sur I , à valeurs dans \mathbb{K} . Soient g et h deux fonctions définies sur I à valeurs dans \mathbb{K} .

Hypothèses :

- Pour tout n dans \mathbb{N} , la fonction f_n est de classe \mathcal{C}^1 sur I .
- La suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers la fonction g sur I .
- Pour tout segment $[a, b]$ inclus dans I , la suite de fonctions $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers la fonction h sur $[a, b]$.

Conclusions : la fonction g est de classe \mathcal{C}^1 sur I et sa dérivée est la fonction h .

Variante pour les fonctions de classe \mathcal{C}^k : l'hypothèse de convergence uniforme porte uniquement sur l'ordre de dérivation le plus élevé.

Programme de colles n° 6 (du lundi 8 au vendredi 19 décembre 2025)

Tout ce chapitre et le théorème de convergence dominée (paragraphe 1 du chapitre 9).
