PC* 26 - DEVOIR N° 11

corrigé

Convection thermique

corrigé

1

Convection thermique entre deux plans

1. Un DL au 1er ordre donne

$$\rho(T) = \rho\left(T_0 + \frac{\Delta T x}{a}\right) \simeq \rho_0 + \frac{\Delta T x}{a} \times \frac{d\rho}{dT}(T_0)$$

$$\rho(T) = \rho_0 - \alpha \frac{\Delta T x}{a} \qquad \boxed{\delta\rho(x) = -\alpha \frac{x \Delta T}{a}}$$

Comme $\alpha > 0$, $\delta\rho > 0$ si $x < 0$: le fluide est plus lourd à gauche, du côté le plus froid.

La variation la plus forte est $\delta\rho_{max} = \alpha \Delta T$.

Les variations sont petites si $\delta\rho_{max} \ll \rho_0$, i.e.

$\boxed{\alpha \Delta T \ll \rho_0}$.

2. $\vec{\nabla} P = \rho \vec{g}$ se projette en $\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial x} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial P}{\partial y} = -\rho(x) g & (2). \end{cases}$

L'équation (1) montre que P ne dépend pas de x, donc $\dfrac{\partial P}{\partial y}$ ne dépend pas non plus de x. Cependant, la relation (2) montre que P dépend de y. Ces deux équations sont donc incompatibles.

3. $\rho\left(\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}\right) = -\vec{\nabla} P + \rho\vec{g} + \eta \Delta \vec{v}$.

Ici, $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ et $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = \left(v \dfrac{\partial}{\partial y}\right) v(x)\vec{u}_y = \vec{0}$.

$$\boxed{\begin{aligned} 0 &= -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 &= -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g + \eta \frac{d^2 v}{dx^2} \end{aligned}}$$

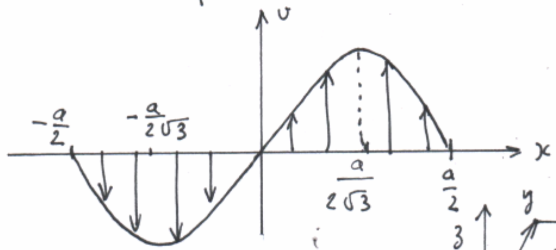
La pression ne dépend pas de x.

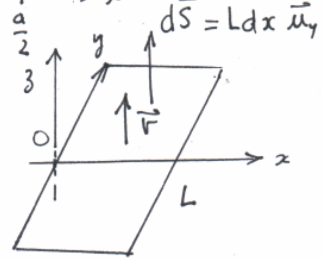
2

4. Comme $\rho = \rho_0 - \alpha \frac{\Delta T x}{a}$, la projection de NS sur $\vec{e_y}$ s'écrit
$$\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g = \alpha g \frac{\Delta T x}{a} + \eta \frac{d^2 v(x)}{dx^2}$$
Le membre de gauche ne dépend que de y et celui de droite que de x. Ils sont donc égaux à une même constante A. De plus, $v(x)$ est une fonction impaire, donc $\frac{d^2v}{dx^2}$ aussi. Le membre de droite est une fonction impaire de x. La seule fonction impaire constante est la fonction nulle. Ainsi, $A = 0$ et
$$\frac{\partial P}{\partial y} + \rho_0 g = 0 \qquad \eta \frac{d^2v}{dx^2} + \alpha g \frac{\Delta T x}{a} = 0$$

5. $\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{\alpha g}{\eta a} \Delta T x$ s'intègre en
$$v = -\frac{\alpha g \Delta T}{\eta a} \frac{x^3}{6} + Bx + C. \qquad C = 0 \text{ par imparité}$$
Les conditions de bord sur les parois s'écrivent
$$\begin{cases} v(-\frac{a}{2}) = 0 \\ v(\frac{a}{2}) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{\alpha g \Delta T a}{24 \eta}$$
$$\boxed{v(x) = \frac{\alpha g \Delta T}{6 \eta a} x\left(\frac{a^2}{4} - x^2\right)}$$
Comme $|x| \leq \frac{a}{2}$, $\frac{a^2}{4} - x^2 \geq 0$ et v est du signe de x. Le fluide descend du côté gauche $(x < 0)$, là où il est le plus froid et lourd ; il monte du côté droit, où il est plus chaud et léger. Cela est conforme à ce que l'on pouvait attendre.

3





6. $$D_v = \int_0^{a/2} v(x) L \, dx$$
$$= \frac{\alpha g \Delta T L}{6 \eta a} \int_0^{a/2} \left(\frac{a^2}{4}x - x^3\right) dx$$
$$= \frac{\alpha g \Delta T L}{6 \eta a} \left(\frac{a^2}{4}\frac{1}{2}\frac{a^2}{4} - \frac{1}{4}\frac{a^4}{16}\right)$$
$$\boxed{D_v = \frac{\alpha g \Delta T L a^3}{384 \eta}} \qquad \frac{1}{6}\left(\frac{1}{32} - \frac{1}{64}\right) = \frac{1}{384}$$

7. $PV = \frac{m}{M} RT \longrightarrow \rho = \frac{MP}{RT} \qquad \frac{d\rho}{dT} = \frac{-MP}{RT^2}$
$$\boxed{\alpha = \frac{MP}{RT^2} = 3,9 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3} \cdot \text{K}^{-1}}$$

8. $D_v = 5,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 3,3 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$

Vidange d'une trémie

Très vieux sujet du concours Mines-Ponts

1. Comme le fluide est supposé incompressible, le débit volumique se conserve, propriété qui s'exprime $S(z)v(z) = S(h)v(h)$, avec $v(h) = dh/dt$ et $S(z) = b(z)^2$. On en déduit

$$v(z) = \frac{S(h)}{S(z)}\frac{dh}{dt} = \frac{b(h)^2}{b(z)^2}\frac{dh}{dt} \qquad \boxed{v(z) = \frac{h^2}{z^2}\frac{dh}{dt}} \quad .$$

2. Le relation de Bernoulli vue en cours s'appliquer pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible. Ici, h dépend du temps et l'écoulement *n'est pas stationnaire*, ce qui invalide l'une des trois conditions d'application.

3. On calcule $\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \vec{0}$. L'écoulement est irrotationnel et dans ces conditions, il existe un potentiel de vitesse Φ tel que $\vec{v} = \nabla\Phi$. À vrai dire, cette remarque ne sert pas à grand chose puisqu'on va trouver Φ explicitement !

Ici, $\vec{v}$ est dirigé selon $\vec{u}_z$ donc le potentiel ne dépend que de z et il est tel que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = v(z,t) = \frac{h^2(t)}{z^2}\frac{dh}{dt} \quad .$$

En intégrant, et en utilisant $\Phi(a,t) = 0$, on en déduit

$$\boxed{\Phi(z,t) = h(t)^2\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)\frac{dh}{dt}} \quad .$$

4. L'équation de Navier-Stokes ne comporte ici pas de terme visqueux et s'écrit

$$\rho\left(\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla v^2 - \vec{v}\wedge(\vec{\text{rot}}\,\vec{v})\right) = -\nabla P + \rho\vec{g} \quad .$$

L'écoulement est irrotationnel : $\vec{\text{rot}}\,\vec{v} = \vec{0}$. De plus,

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi = \nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} \quad .$$

On a donc

$$\nabla\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\rho}{2}\nabla v^2 = -\nabla\left(\frac{P}{\rho}\right) - g\,\vec{u}_z \quad .$$

Soit $d\vec{\ell}$ un déplacement infinitésimal (pas forcément sur une ligne de courant). Le produit scalaire de la dernière équation avec $d\vec{\ell}$ donne :

$$d\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t}\right) + d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -d\left(\frac{P}{\rho}\right) - g\,dz$$

ou encore

$$d\left(\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz\right) = 0 \quad .$$

La quantité F est donc uniforme dans l'espace.

5. En dérivant l'expression de Φ obtenue dans la question 3, on trouve

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(z,t) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{z}\right)\left(2h\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + h^2\frac{d^2h}{dt^2}\right) \quad .$$

Cette dérivée s'annule en $z = 0$. En évaluant chacun des termes de F en $z = 0$, on obtient

$$\boxed{F(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{a^2}\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{P_0}{\rho} + ga} \quad .$$

6. En évaluant maintenant chacun des termes de F en $z = H$, puis en identifiant à l'expression ci-dessus, on obtient

$$F(t) = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h}\right)\left(2h\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + h^2\frac{d^2h}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{P_0}{\rho} + gh \quad = \frac{1}{2}\left(\frac{h^2}{a^2}\frac{dh}{dt}\right)^2 + \frac{P_0}{\rho} + ga$$

d'où l'équation différentielle

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{h}\right)\left(2h\left(\frac{dh}{dt}\right)^2 + h^2\frac{d^2h}{dt^2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\left(1 - \frac{h^4}{a^4}\right) + g(h-a) = 0 \quad .$$

Par quelques calculs, on peut simplifier cette équation différentielle en

$$2h\frac{d^2h}{dt^2} + \left(\frac{dh}{dt}\right)^2\left(3 - h - h^2 - h^3\right) + g = 0 \quad .$$

7. Comme l'énoncé nous y invite, on néglige le terme en dérivée seconde et on en déduit

$$\left(\frac{d\lambda}{dt}\right)^2 = \frac{2g}{a}\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)} \quad .$$

Comme le niveau s'abaisse, $d\lambda/dt < 0$ et on prend la racine négative :

$$\frac{d\lambda}{dt} = -\sqrt{\frac{2g}{a}}\frac{1}{\sqrt{(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)}} \quad .$$

À $t = 0$, $\lambda = h(0)/a$ et lorsque la vidange se termine, $\lambda = 0$. En séparant les variables et en intégrant membre à membre, on obtient

$$t_v = -\sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{\lambda(0)}^{0}\sqrt{(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)}d\lambda \qquad \boxed{t_v = \sqrt{\frac{a}{2g}}\int_{0}^{\lambda(0)}\sqrt{(\lambda-1)(\lambda^2+2\lambda+3)}d\lambda} \quad .$$

8. $t_v = 168\,\mathrm{s}$

9. Il y a des frottements solides entre les grains et appliquer le modèle du fluide parfait est très critiquable. Il y aussi des frottements contre les parois. Quand on observe un sablier, on constate qu'il se vide plus vite au milieu que sur les bords, et cela montre qu'il est incorrect d'affirmer que la vitesse ne dépend que de z.

Glissement en microfluidique
CCINP

Glissement en microfluidique 1

Q32 Cf cours

Q33 $Re = \dfrac{UL}{\nu} = \dfrac{1.10^{-3} \times 10.10^{-6}}{\dfrac{1.10^{-3}}{1.10^{3}}}$ $\quad Re = 10^{-2} \ll 1$

On peut donc négliger le terme convectif $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v}$.

Q34 Avec la forme $\vec{v} = v_x(z)\vec{u}_x$, $\vec{v}.\vec{\nabla} = v_x \dfrac{\partial}{\partial x}$ et
$(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = v_x \dfrac{\partial}{\partial x}\left(v_x(z)\vec{u}_x\right)$.
Comme v_x est fonction seulement de z et comme $\vec{u}_x$ est indépendant de x, la dérivée est nulle : $(\vec{v}.\vec{\nabla})\vec{v} = 0$

Q35 Ici, $\Delta\vec{v} = \Delta\left(v_x(z)\vec{u}_x\right) = \dfrac{d^2 v_x}{dz^2}\vec{u}_x$.
En projection sur $\vec{u}_x$, l'équation de NS devient
$$0 = -\frac{\partial P}{\partial x} + \eta \frac{d^2 v_x}{dz^2}$$

Q36 Comme $\dfrac{\partial P}{\partial x} = -K$, la relation précédente s'écrit
$\dfrac{d^2 v_x}{dz^2} = -\dfrac{K}{\eta}$ et en intégrant deux fois on obtient
$$\boxed{v_x = -\frac{K}{2\eta}z^2 + Az + B} \quad \text{avec } (A,B) \in \mathbb{R}^2.$$
Les conditions de bord de Navier-Maxwell s'écrivent :

* $v\left(\dfrac{h}{2}\right) = -L_g \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\left(\dfrac{h}{2}\right)$: $-\dfrac{K}{8\eta}h^2 + A\dfrac{h}{2} + B \overset{(1)}{=} L_g \dfrac{Kh}{2\eta} - L_g A$

* $v\left(-\dfrac{h}{2}\right) = L_g \dfrac{\partial v_x}{\partial z}\left(-\dfrac{h}{2}\right)$: $-\dfrac{K}{8\eta}h^2 - A\dfrac{h}{2} + B \overset{(2)}{=} L_g \dfrac{Kh}{2\eta} + L_g A$

(1)+(2) donne $-\dfrac{K}{4\eta}h^2 + 2B = \dfrac{L_g K h}{\eta}$
d'où $\boxed{B = \dfrac{Kh^2}{8\eta} + \dfrac{L_g K h}{2\eta}}$

2

(1) - (2) donne $-Ah = -2L_g A \qquad A(h - 2L_g) = 0$

La suite de l'énoncé indique $h \ll 2L_g$, donc $h - 2L_g \neq 0$.

On en déduit $\underline{A = 0}$.

$$v_x = -\frac{Kz^2}{2\eta} + \frac{Kh^2}{8\eta} + \frac{KhL_g}{2\eta}$$

$$v_x = \frac{KhL_g}{2\eta} + \frac{Kh}{2\eta}\left(\frac{h^2}{4} - z^2\right)$$

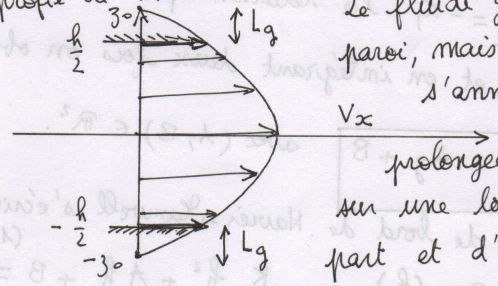
Q37. On cherche z_0 tel que $v_x(z_0) = 0$. On trouve

$$z_0 = \pm\sqrt{\frac{h^2}{4} + L_g h} = \pm\frac{h}{2}\sqrt{1 + \frac{4L_g}{h}} \simeq \pm\frac{h}{2}\left(1 + \frac{2L_g}{h}\right)$$

$$z_0 = \pm\frac{h}{2} \pm L_g \qquad |z_0| = \frac{h}{2} + L_g \qquad L_g = |z_0| - \frac{h}{2}$$

Pour comprendre l'appellation « longueur de glissement »,

traçons le profil de vitesse.



Le fluide glisse sur la paroi, mais la vitesse s'annulerait si on prolongeait la parabole sur une longueur l_g de part et d'autre.

Par rapport à l'écoulement de Poiseuille usuel, tout se passe comme si on élargissait le canal de l_g de chaque côté.

Q38 $\quad D_v = \int_{-\frac{h}{2}}^{h/2} v_x(z)\, l\, dz = 2l \int_0^{h/2} v_x(z)\, dz$

$$\boxed{D_v = \frac{lK}{2\eta} h^2 \left(L_g + \frac{h}{6}\right)}$$ après un calcul simple.

3

Q39 $\quad -K = -\frac{dp}{dx}$ est le taux d'accroissement de p en fonction de x. $\quad -K = \frac{p(L) - p(0)}{L} \qquad \boxed{K = \frac{\Delta P}{L}}$

Q40 $\quad D_v = \frac{l}{2\eta}\frac{\Delta P}{L} h^2 \left(L_g + \frac{h}{6}\right)$

$$\boxed{R_h = \frac{\Delta P}{D_v} = \frac{2\eta L}{l h^2 \left(L_g + \frac{h}{6}\right)}}$$

ΔP est l'analogue d'une différence de potentiel U.

D_v est un flux et analogue à une intensité électrique I.

Donc $\frac{\Delta P}{D_v}$ est analogue à $\frac{U}{I} = R$ résistance électrique.

Q41 Sans glissement, $R_{h_{sg}} = \frac{2\eta L}{L h^2 \left(\frac{h}{6}\right)}$

donc $\frac{R_h}{R_{h_{sg}}} = \frac{h/6}{L_g + h/6} \qquad \boxed{\frac{R_h}{R_{h_{sg}}} = \frac{h}{h + 6L_g}} \boxed{= \frac{1}{4}}$

On constate que $\frac{R_h}{R_{h_{sg}}} < 1$, i.e. $\underline{R_h < R_{h_{sg}}}$.

La présence du glissement réduit la résistance hydraulique.

Le fluide s'écoule <u>plus facilement</u>.

Chapelet de gouttes d'eau sur une toile d'araignée
Mines 22

16. Dans l'état de repos, le volume V est compris entre deux cylindres :

$$V = \pi(R_0^2 - a^2)\lambda = \pi\left((h_0+a)^2 - a^2\right) \quad .$$

Dans l'état modulé, la portion comprise entre les cotes z et $z+dz$ a pour volume $\pi[(a+h)^2 - a^2]dz$ et le volume cherché s'exprime par

$$V' = \int_0^\lambda \pi[(a+h)^2 - a^2]dz = \pi\int_0^\lambda (h^2 + 2ah)dz = \pi\int_0^\lambda (h_m^2 + 2\epsilon h_m \cos kz + \epsilon^2\cos^2 kz + 2ah_m + 2a\epsilon\cos kz)$$

Sur une période, l'intégrale de la fonction cosinus est nulle et celle de la fonction $\cos^2$ vaut $\lambda/2$. On en déduit

$$V' = \pi\left(h_m^2 + \frac{\epsilon^2}{2} + 2ah_m\right)\lambda \quad \text{ou encore} \quad V' = \pi\left((h_m+a)^2 - a^2 + \frac{\epsilon^2}{2}\right) \quad .$$

Comme le fluide est incompressible, $V = V'$ ce qui conduit à

$$(h_0+a)^2 - a^2 = (h_m+a)^2 - a^2 + \frac{\epsilon^2}{2}$$

$$h_m + a = (h_0+a)\sqrt{1 - \frac{\epsilon^2}{2(h_0+a)^2}} \simeq (h_0+a)\left[1 - \frac{\epsilon^2}{4(h_0+a)^2}\right]$$

$$\boxed{h_m \simeq h_0 - \frac{\epsilon^2}{4R_0}} \qquad \boxed{\chi = 4} \quad .$$

17. Dans l'état de repos, l'aire de l'interface est $S = 2\pi R_0\lambda$ et l'énergie associée $E_0 = \gamma S = 2\pi\gamma(h_0+a)\lambda$.

Dans l'état modulé, la surface a pour rayon $r(z,t) = a + h(z,t)$. L'aire dS d'une portion de longueur dz s'écrit, d'après l'expression fournie au début de l'énoncé :

$$dS = 2\pi(a+h)\sqrt{1 + \left(\frac{dh}{dz}\right)^2}dz = 2\pi(a+h)dz\sqrt{1 + \epsilon^2k^2\sin^2 kz} \simeq 2\pi(a+h)dz\left(1 + \frac{\epsilon^2k^2}{2}\sin^2 kz\right)$$

La nouvelle énergie de surface est donc

$$E_1 = 2\pi\gamma\int_0^\lambda (a + h_m + \epsilon\cos kz)\left(1 + \frac{\epsilon^2k^2}{2}\sin^2 kz\right)dz \quad .$$

Sur une période, les intégrale des fonctions cos et $\cos\sin^2$ sont nulles et celle de $\sin^2$ vaut $\lambda/2$.

$$E_1 = 2\pi\gamma\left[(a+h_m)\lambda + (a+h_m)\frac{k^2}{2}\frac{\epsilon^2\lambda}{2}\right] = 2\pi\gamma\lambda\left[a + h_m + (a+h_m)\frac{\epsilon^2k^2}{4}\right] \quad .$$

La variation d'énergie entre les deux états s'exprime par

$$\Delta E = E_1 - E_0 = 2\pi\gamma\lambda\left[h_m - h_0 + (a+h_m)\frac{\epsilon^2k^2}{4}\right]$$

En utilisant l'expression (1) de h_m obtenue dans la question (16), il vient

$$\Delta E = 2\pi\gamma\lambda\left[-\frac{\epsilon^2}{\chi R_0} + \frac{\epsilon^2k^2}{4}\left(a + h_0 - \frac{\epsilon^2}{\chi R_0}\right)\right]$$

En négligeant les termes en ϵ^4,

$$\Delta E \simeq 2\pi\lambda\gamma\epsilon^2\left[-1 + k^2R_0^2\right] \quad \Delta E = 2\pi\lambda\gamma\frac{\epsilon^2}{\chi R_0}\left(k^2R_0^2 - 1\right) \quad \text{avec toujours} \quad \chi = 4 \quad .$$

18. Si l'état modulé présente une énergie supérieure à celle de l'état de repos, il ne peut pas apparaître spontanément ou, s'il apparaît, il tendra à se résorber. Donc l'état de repos est stable si $\Delta E > 0$, c'est à dire si $k^2 R_0^2 > 1$ ou encore $\lambda < 2\pi R_0$.

Au contraire, si $\Delta E < 0$, c'est à dire si $\lambda > 2\pi R_0$, cet état aura naturellement tendance à se former. L'état de repos est instable et la modulation s'instaure, s'amplifie, jusqu'à ce que le film de scinde en gouttelettes.

19. À cause de l'invariance du problème par rotation autour de l'axe $(O, \vec{u}_z)$, la vitesse ne dépend pas de z. Comme l'écoulement est incompressible, div $\vec{v} = 0$ et cela s'écrit ici $\partial v/\partial z = 0$, donc v ne dépend pas non plus de z. Finalement, v n'est fonction que de r.

L'accélération particulaire est donnée par

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v}.\vec{\nabla}\,\vec{v} = \vec{0} + v\frac{\partial}{\partial z}(v(r)\,\vec{u}_z) = \vec{0} \quad .$$

L'équation de Navier-Stokes

$$\rho\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\nabla P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$$

se projette sur $\vec{u}_z$ et $\vec{u}_r$ pour obtenir

$$0 = -\frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \qquad \text{et} \qquad 0 = -\frac{\partial P}{\partial r} \quad .$$

La seconde relation montre que la pression ne dépend que de z et la première se réécrit

$$\frac{dP}{dz} = \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) \quad .$$

Dans cette relation, le membre de gauche est fonction de z seulement et celui de droite fonction de r seulement. Ils sont donc égaux à une seule et même constante que l'on note β.

$$\frac{dP}{dz} = \beta \qquad \frac{\eta}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \beta \quad .$$

20. La relation $dv/dr(r = R_0) = 0$ signifie que la fonction de frottement visqueux s'annule à la surface du liquide. En effet, selon la loi de Newton, cette force est proportionnel à dv/dr et, comme l'air est très peu visqueux, il est légitime d'admettre qu'elle s'annule là où l'eau rencontre l'air. D'après la question précédente, on a

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dv}{dr}\right) = \frac{\beta r}{\eta} \quad \text{qui s'intègre en} \quad r\frac{dv}{dr} = \frac{\beta r^2}{2\eta} + K \quad .$$

Grâce à la condition de bord énoncé juste au dessus, on trouve $K = -\beta R_0^2/(2\eta)$ puis

$$\frac{dv}{dr} = \frac{\beta}{2\eta}\left(r - \frac{R_0^2}{r}\right) \quad .$$

En intégrant, on obtient

$$v(r) - v(a) = \frac{\beta}{2\eta}\int_a^r \left(r' - \frac{R_0^2}{r'}\right) dr' \quad .$$

En $r = a$, l'eau est en contact avec le fil cylindrique immobile donc $v(a) = 0$ et finalement,

$$v(r) = \frac{\beta}{2\eta}\left(\frac{r^2 - a^2}{2} - R_0^2 \ln\frac{r}{a}\right) = -\alpha\left\{\left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \ln\left(\frac{r}{a}\right) + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]\right\} \quad \text{avec} \quad \boxed{\alpha = \frac{\beta a^2}{2\eta}} \quad .$$

21. On utilise l'élément de surface $dS = 2\pi r dr$ puis le changement de variable $u = r/a$, $dr = adu$.

$$Q = \int v\,dS = \int_a^{a+h_0} 2\pi r v(r) dr = 2\pi\int_1^{1+h_0/a} au\,v(au)\,adu$$

$$Q = -2\pi a^2\alpha\int_1^{1+x} u\left[\left(\frac{R_0}{a}\right)^2 \ln u + \frac{1}{2}\left(1 - u^2\right)\right] du$$

L'énoncé originale du concours Mines-Ponts demandait de poursuivre ce calcul avec l'aide d'une primitive fournie. Ici, le calcul n'est pas demandé et on admet l'expression

$$Q = \frac{2\pi a h_0^3\beta}{3\eta}\xi(x) \quad \text{où} \quad \xi(x) \quad \text{est donné par l'énoncé.}$$

22. On calcule

$$\frac{\partial h}{\partial z} = -k\epsilon \sin kz \qquad \frac{\partial^3 h}{\partial z^3} = k^3 \epsilon \sin kz \quad .$$

En utilisant l'expression fournie par l'énoncé, on en déduit

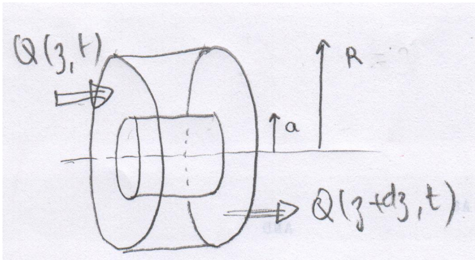
$$\beta = \frac{\partial P}{\partial z} = \gamma k \epsilon \left(\frac{1}{a^2} - k^2\right) \sin kz \quad \text{puis} \quad \boxed{Q = \frac{2\pi a h_0^3 \gamma k \epsilon \xi(x)}{3\eta} \left(\frac{1}{a^2} - k^2\right) \sin kz} \quad .$$

23. Considérons la portion de film comprise entre les cotes z et $z + dz$. Elle contient le volume de fluide

$$V_{\text{contenu}} = \pi(R^2 - a^2)dz$$

qui, pendant dt, varie de

$$dV_{\text{contenu}} = V_{\text{contenu}}(t + dt) - V_{\text{contenu}}(t) = \pi(R^2(z, t + dt) - R^2(z, t))dz \quad .$$



Pendant dt, ce système ouvert reçoit le volume de fluide

$$dV_{\text{recu}} = Q(z, t)dt - Q(z + dz, t)dt \quad .$$

Comme l'eau est incompressible, on a $dV_{\text{contenu}} = dV_{\text{recu}}$, c'est à dire

$$\pi[R^2(z, t + dt) - R^2(z, t)]dz = [Q(z, t)dt - Q(z + dz, t)]dt$$

$$\pi\frac{R^2(z, t + dt) - R^2(z, t)}{dt} = \frac{Q(z, t)dt - Q(z + dz, t)}{dz}$$

c'est à dire

$$\pi\frac{\partial R^2}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad \text{ou encore} \quad 2\pi R\frac{\partial R}{\partial t} = -\frac{\partial Q}{\partial z} \quad .$$

24. Comme $R = a + h = a + h_m + \epsilon(t) \cos kz$, $\frac{\partial R}{\partial t} = \dot{\epsilon} \cos kz$. En utilisant l'expression de Q établie dans la question 22, on obtient

$$-\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{2\pi a h_0^3 \gamma k^2 \epsilon \xi(x)}{3\eta} \left(\frac{1}{a^2} - k^2\right) \cos kz$$

L'équation bilan de la question 23 s'écrit donc

$$2\pi(a + h_m + \epsilon \cos kz)\dot{\epsilon} \cos kz + \frac{2\pi a h_0^3 \gamma k^2 \epsilon \xi(x)}{3\eta} \left(\frac{1}{a^2} - k^2\right) \cos kz = 0 \quad .$$

Le terme $\epsilon\dot{\epsilon}$ est d'ordre 2, on le néglige. De plus, $a \ll h_m$ et $a + h_m \simeq a$. Comme l'énoncé nous y invite, on prend la limite pour $x \to 0$ donc $\xi \to -1$. Après simplification par $\cos kz$, on obtient

$$\dot{\epsilon} + \delta\left(k^4 a^2 - k^2\right)\epsilon = 0 \quad \text{avec} \quad \boxed{\delta = \frac{h_0^3 \gamma}{3\eta a^2}} \quad .$$

On vérifie que δ a pour dimension L^2T^-1.

Le comportement des solutions cette équation différentielle linéaire du premier ordre dépend du signe du terme en facteur de ϵ.

— si $k^4a^2 - k^2 > 0$, c'est à dire si $ka > 1$ ou encore $\lambda < 2\pi a$, les solutions sont en exponentielles décroissantes : le film est stable.

— Au contraire, si $\lambda > 2\pi a$, le film est instable, les oscillations s'amplifient, le film est instable et de gouttes vont se former.

25. Un laser de longueur d'onde 633 nm est de couleur rouge. Pour répondre à la suite de la question, il faut de notions sur la diffraction, qui ne figure plus au programme mais que nous avons entrevue dans le cours d'optique. Vous avez peut-être conservé un souvenir de votre enseignement secondaire. Le fil de diamètre $2a$ provoque la diffraction avec une ouverture angulaire 2θ, $\theta \simeq \frac{\lambda_0}{2a}$. Sur l'écran, la tache a pour taille $b = 2D\tan\theta \simeq 2D\theta \simeq \lambda_0 D/a$, donc $a = \lambda D/b$.

On identifie la longueur λ de modulation du film à la taille g des gouttes. D'après la question précédente, $g > 2\pi a$, c'est à dire

$$g > \frac{2\pi\lambda_0 D}{b} = 88\,\mu\text{m} \quad .$$

En ordre de grandeur, les gouttes mesurent au moins environ un dixième de millimètre.

1

Dynamique de modules spatiaux (Centrale MP 23)

Q 2. On connaît l'expression $\vec{\mathcal{G}} = -G\frac{M}{r^2}\vec{u}_r$.

Comme $\vec{\mathcal{G}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,V$, $V = -\frac{GM}{r}$.

Q 3. On raisonne dans le référentiel de centre O et dont les axes pointent vers trois étoiles lointaines, galiléen. La projection du pfd sur $\vec{u}_r$ donne :

$$-m r\dot{\theta}^2 = -\frac{GMm}{r^2}$$

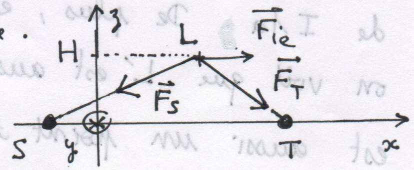
$$\omega = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}$$

Q 4. Un point de masse m situé en L est soumis, dans $\mathcal{R}$, à la force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_{ie} = m\omega^2\overrightarrow{HL} = m\omega^2(x\vec{u}_x + y\vec{u}_y)$. Cette force n'a pas de composante selon $\vec{u}_z$, seules les forces de gravitation interviennent selon $\vec{u}_z$.

La Terre exerce $\vec{F}_T = -G\frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3}mM_T$ et le Soleil exerce $\vec{F}_S = -GmM_S\frac{\overrightarrow{SL}}{SL^3}$.

Si $z \neq 0$, ces deux forces ont des projections selon $\vec{u}_z$ de même signe et ne peuvent pas se compenser de sorte que l'équilibre est impossible.

À l'équilibre, $z = 0$.



2

$\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} x + aD \\ y \\ z \end{pmatrix}$ $\quad \overrightarrow{TL}\begin{pmatrix} x - (1-a)D \\ y \\ z \end{pmatrix}$ avec $z = 0$

$SM^3 = \left[(x+aD)^2 + y^2\right]^{3/2}$ $\quad TM^3 = \left[(x-(1-a)D)^2 + y^2\right]^{3/2}$

À l'équilibre, $\vec{F}_{ie} + \vec{F}_S + \vec{F}_T = \vec{0}$

$$m\omega^2\overrightarrow{HL} - mM_SG\frac{\overrightarrow{SL}}{SL^3} - mM_TG\frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3} = \vec{0}$$

avec $\omega^2 = \frac{GM}{D^3}$, $M_S = (1-a)M$ et $M_T = aM$.

Après simplification par mMG, on obtient :

$$\frac{\overrightarrow{HL}}{D^3} - (1-a)\frac{\overrightarrow{SL}}{SL^3} - a\frac{\overrightarrow{TL}}{TL^3} = \vec{0}.$$

En projetant sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$, on obtient

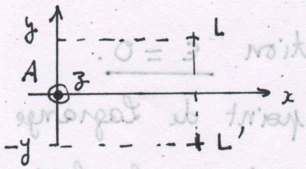
$$-\frac{a\left(x-(1-a)D\right)}{\left[(x-(1-a)D)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{(1-a)(x+aD)}{\left[(x+aD)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{x}{D^3} = 0 \quad (I1a)$$

$$-\frac{ay}{\left[(x-(1-a)D)^2+y^2\right]^{3/2}} - \frac{(1-a)y}{\left[(x+aD)^2+y^2\right]^{3/2}} + \frac{y}{D^3} = 0 \quad (I1b)$$

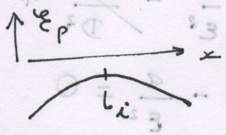
Q 5 Soit $L(x, y, 0)$ un point de Lagrange, solution des équations I1a et I1b. Considérons le point $L'(x, -y, 0)$. Comme $(-y)^2 = y^2$, L' est aussi solution de I1a. De plus, en multipliant I1b par (-1), on voit que L' est aussi solution de I1b. Donc L' est aussi un point de Lagrange.

3

Les points de Lagrange sont donc symétriques par rapport à (Ax).



Q6 Une position d'équilibre est associée à un extremum d'énergie potentielle, ce qui permet de placer les points. Les zones où l'énergie potentiel tend vers $-\infty$ sont situées près de T et S. Pour repérer les extremums sur l'axe (Ax), on utilise les valeurs inscrites sur les courbes de niveau et on détecte un comportement du type suivant :



À chaque fois, on se trouve sur un maximum, donc L_1, L_2 et L_3 sont instable. De même pour L_4 et L_5.

En réalité, la force de Coriolis peut rendre stable certaines de ces positions, mais cet aspect n'est pas évoqué ici.

Q7 $a = 3{,}005 \cdot 10^{-6}$

Si $a = 0$, (I.2) devient $\dfrac{1}{(D-\varepsilon)^2} - \dfrac{1}{D^2} + \dfrac{\varepsilon}{D^3} = 0$

$\dfrac{1}{(D-\varepsilon)^2} + \dfrac{\varepsilon - D}{D^3} = 0 \qquad D^3 = (D-\varepsilon)^3$ et a pour

4

solution $\underline{\varepsilon = 0}$.

Le point de Lagrange serait en T, à la place de la Terre.

On retrouve le fait que le point tournerait autour du Soleil comme décrit dans Q3, et serait donc fixe dans $\mathcal{R}$.

Q8 $\dfrac{1-a}{(D-\varepsilon)^2} = \dfrac{1-a}{D^2\left(1-\frac{\varepsilon}{D}\right)^2} \simeq \dfrac{1-a}{D^2}\left(1 - 2\dfrac{\varepsilon}{D}\right)$.

Avec ce DL, (I.2) devient

$$\frac{1-a}{D^2}\left(\cancel{1} + \frac{2\varepsilon}{D}\right) - \frac{a}{\varepsilon^2} - \cancel{\frac{1-a}{D^2}} + \frac{\varepsilon}{D^3} = 0$$

$$\frac{\varepsilon}{D^3}\left(1 + 2(1-a)\right) - \frac{a}{\varepsilon^2} = 0$$

$$\varepsilon^3 = \frac{a D^3}{3-2a} \qquad \boxed{\varepsilon = D\sqrt[3]{\frac{a}{3-2a}}}$$

$$\underline{\varepsilon = 0{,}01\,D = 1{,}5 \cdot 10^9\ \text{m}}$$

On retrouve la distance l de Q1.

Q9 Sur la figure 2, on voit bien l'extremum en $\dfrac{x}{D} = 0{,}99$.

$x_T = (1-a)D \qquad \dfrac{x_T - \varepsilon}{D} = 1 - a - 0{,}01 \simeq 0{,}99$

La position lue sur le graphique est en accord avec celle calculée. L'extremum en $x = 1{,}01$ correspond à L_2.

Q10 • Le terme $4\pi \dfrac{dv}{d\tau}$ est une projection de la force de Coriolis. En effet, $\vec{f}_{ic} = -2m\omega \vec{u}_z \wedge \vec{v}$ comporte un terme proportionnel à $2m\omega v_y$, et ici $v_y = \dot{\beta} = D\dot{v} = D \times \dfrac{2\pi}{\omega}\dfrac{dv}{d\tau}$ (car $dt = \dfrac{2\pi}{\omega} d\tau$).

• Le terme $4\pi^2 u$ provient de f_{ie}, c'est une réécriture d'un terme issu de $f_{ie\,x} = m\omega^2 x \,\vec{u}_x$.

• Le terme $4\pi^2 \times \dfrac{2a}{\varepsilon^3} u$ est lié à l'attraction de la Terre, dont la masse est proportionnelle à a.

• Le terme $4\pi^2 \times \dfrac{2(1-a)}{(1-\varepsilon)^3} u$ est lié à l'attraction du Soleil, dont la masse est proportionnelle à $(1-a)$.

Q11 Soit $C = \dfrac{a}{\varepsilon^3} + \dfrac{1-a}{(1-\varepsilon)^3}$ $\quad \epsilon = \dfrac{\varepsilon}{D} = 0{,}01$, $a = 3{,}005 \cdot 10^{-6}$

$$C = 4{,}03 \approx 4$$

$\dfrac{d^2w}{d\tau^2} + 4\pi^2 C w = 0$ se résout en $\underline{w = w_0 \cos(2\pi\sqrt{C}\tau + \varphi)}$.

Le mouvement dans la direction $(L_1 z)$ est oscillant.

Comme $2\pi\tau = \omega t$, $\quad \gamma = Dw = Dw_0 \cos(\sqrt{C}\,\omega t + \varphi)$.

La période d'oscillations est $T_z = \dfrac{2\pi}{\sqrt{C}\,\omega} \approx \dfrac{1}{2}\,\dfrac{2\pi}{\omega}$.

La pulsation ω décrit la rotation de la Terre autour du Soleil : $\dfrac{2\pi}{\omega} = 1\,\text{an}$. Donc $T_z = \dfrac{1}{2}$ an.

Q12
$$\begin{cases} \dfrac{du}{d\tau} = u_p \\ \dfrac{dv}{d\tau} = v_p \\ \dfrac{dw}{d\tau} = w_p \\ \dfrac{du_p}{d\tau} = 4\pi v_p + 4\pi^2 A u \\ \dfrac{dv_p}{d\tau} = -4\pi u_p + 4\pi^2 B v \\ \dfrac{dw_p}{d\tau} = -4\pi^2 C w \end{cases}$$

Q13. Soit $X(t) \left| \begin{array}{l} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_N(t) \end{array}\right.$ une fonction de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $t \longmapsto X(t)$

solution de $\dfrac{dX}{dt} = F(X)$ avec $X(0) = X_0$.

La méthode d'Euler calcule approximativement $X(h)$, $X(2h)$, $X(3h)$, ……, selon la relation suivante :

$$X((n+1)h) \simeq X(nh) + h\,F(X(nh)).$$

En partant de $X(0) = X_0$, on obtient ainsi les valeurs approximatives $X(nh)$ par itération.

7

Q14 Voici les instructions à écrire dans les codes.

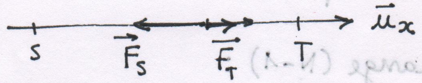
```
*  h = tau_f / (N-1)
*  u[0], v[0], .... wp[0] = init
*  for i in range(N-1):
       u[i+1] = u[i] + h * up[i]
       v[i+1] = v[i] + h * vp[i]
       w[i+1] = w[i] + h * wp[i]
       up[i+1] = up[i] + h * ( 4*mp.pi * vp[i-1]
            + 4*mp.pi**2 * A * u[i] )
       vp[i+1] = vp[i] + h * (-4*mp.pi * up[i-1]
            + 4*mp.pi**2 * B * v[i] )
       wp[i+1] = wp[i] - h * 4*mp.pi**2 * C * w[i]
```

Q15 Pour w, on voit un aller-retour correspondant au mouvement d'oscillation décrit dans Q11.
Pour u et v, on voit un éloignement progressif inexorable de L_1 : cette position est donc instable.

Q16 Question délicate car la figure 4 ne porte pas d'échelle de temps. On constate qu'un déplacement significatif se produit en (α, β) pour une oscillation selon $(L_1 z)$. L'ordre de grandeur de la durée cherchée est donc $T_z = \frac{1}{2}$ an.

8

Q17 La position L_1 correspond à une compensation des forces $\vec{F_s}$, $\vec{F_T}$ et $\vec{F_{ie}}$.



La force $\vec{F_p}$ est dans le sens de $\vec{u}_x$, comme $\vec{F_{ie}}$ et $\vec{F_T}$. Pour retrouver un équilibre, il faut renforcer $\vec{F_s}$ donc la nouvelle position d'équilibre est plus proche du Soleil.

Plus R est grand et plus la pression de radiation est forte, Donc le déplacement plus important.

Pour Q6