Exercice 1. (*) Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{I}_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t$.

a. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t$ (cette intégrale est notée I dans la suite).

b. À l'aide d'un changement de variable bien choisi, trouver une relation entre I_n et l'intégrale de Wallis W_{2n+1}.

c. On donne l'équivalent $\mathrm{W}_p \sim \sqrt{\pi/(2p)}$. En déduire la valeur de I.

d. Prouver l'égalité $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, admise dans un exercice du chapitre 4.

Exercice 2. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{W}_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) \, \mathrm{d}t$.

Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \mathrm{W}_n$.

Exercice 3. (**) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^n$.

Montrer l'égalité $u_n = \int_0^n \left(1 - \frac{\lfloor x \rfloor}{n}\right)^n \, \mathrm{d}x$ et en déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 4. (**) Pour tout x réel, on pose $f(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} \, \mathrm{d}t$.

a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que

$$f(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-t^2/2} \left(\sum_{k=0}^{2n} \frac{(-\mathrm{i}tx)^k}{k!}\right) \, \mathrm{d}t.$$

c. En déduire une expression de $f(x)$. On admettra la relation

$$\forall m \in \mathbb{N}, \quad \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}\frac{(2m)!}{m!\,2^{2m}},$$

obtenue dans l'exercice 4 du chapitre 4.

Exercice 5. (**) Pour tout x dans $]0, +\infty[$, on pose $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t} \, \mathrm{d}t$.

Pour tout n dans $\mathbb{N}$ et tout x dans $]0, +\infty[$, on pose $\mathrm{B}_n(x) = \int_0^1 y^{x-1}(1-y)^n \, \mathrm{d}y$.

a. Montrer rapidement que les nombres $\Gamma(x)$ et $\mathrm{B}_n(x)$ sont bien définis.

b. Pour tout x dans $]0, +\infty[$, établir un lien entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$.

c. Pour tout x dans $]0, +\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, établir un lien entre $\mathrm{B}_n(x)$ et $\mathrm{B}_{n-1}(x+1)$.

d. En itérant cette relation, obtenir une expression explicite de $\mathrm{B}_n(x)$.

e. Soit x dans $]0, +\infty[$. En utilisant le théorème de convergence dominée, montrer la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \, \mathrm{d}t.$$

f. En déduire la relation suivante

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^x \times n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}.$$

Exercice 6. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. On pose $g(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et $g(0) = f'(0)$.

Vérifier l'égalité $\displaystyle\int_0^1 f'(xt)\,\mathrm{d}t = g(x)$ pour tout x réel. En déduire que la fonction g est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. (*) Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

a. Dériver la fonction f. En déduire une relation entre f et g.

b. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 8. (**) On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(tx)}{t(1+t^2)}\,\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Exprimer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout x dans $]0,1[\cup]1,+\infty[$ puis pour tout $x \in [0,+\infty[$.

d. Obtenir finalement une expression de $\mathrm{F}(x)$ pour tout x réel.

Exercice 9. (*) Pour tout $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2$, montrer l'existence de l'intégrale.

$$\mathrm{I}(a,b) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Calculer cette intégrale. Pour cela, on pourra fixer a et dériver par rapport à b.

Exercice 10. (**) On pose $\mathrm{J}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t+\mathrm{i}tx}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ quand c'est possible.

a. Montrer que la fonction J est définie sur $\mathbb{R}$.

b. Montrer que la fonction J est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

c. Trouver une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par J puis trouver une expression simple de $\mathrm{J}(x)$.

Exercice 11. (**) **Intégrale de Fresnel complexe**

1. On considère un élément z de $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. On pose $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$.

1.a. Trouver une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t-z}$.

1.b. Prouver la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-z^2}$ et préciser sa valeur.

2. Pour tout x réel, on pose $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2(\mathrm{i}+t^2)}}{\mathrm{i}+t^2}\,\mathrm{d}t$.

2.a. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2.b. Calculer $f(0)$ et montrer que la fonction f tend vers 0 en $+\infty$.

2.c. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer sa dérivée.

2.d. En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}t^2}\,\mathrm{d}t$ existe et préciser sa valeur.
