Chapitre 9 — réduction des endomorphismes et des matrices

1 Éléments propres

1.1 Éléments propres d'un endomorphisme

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre.
Spectre dans le cas de dimension finie.
Les espaces propres sont en somme directe.
Une remarque en passant : les espaces propres de f relatifs à des valeurs propres non nulles sont ceux de l'endomorphisme de $\mathrm{Im}(f)$ induit par f. C'est utile pour la recherche des valeurs propres non nulles des matrices de petit rang.

1.2 Éléments propres d'une matrice

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre. Ce sont les éléments propres de l'endomorphisme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.
Spectre(s) d'une matrice.
Lien entre les éléments propres d'un endomorphisme et ceux des matrices représentatives.

1.3 Polynôme caractéristique

Polynôme caractéristique χ_A d'une matrice carrée, défini par $\chi_\mathrm{A}(t) = \mathrm{dét}(t\mathrm{I}_n - \mathrm{A})$.
Polynôme caractéristique χ_u d'un endomorphisme u d'un espace vectoriel de dimension finie. Lien entre les deux notions.
Les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.
Identité $\chi_\mathrm{A} = \chi_{\mathrm{A}^\mathrm{T}}$. Égalité $\mathrm{Sp}(\mathrm{A}) = \mathrm{Sp}(\mathrm{A}^\mathrm{T})$.
Cas des matrices triangulaires.

1.4 Multiplicité des valeurs propres

Définition : c'est la multiplicité en tant que racine du polynôme caractéristique.
Expression du déterminant et de la trace dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé. Plus précisément, si $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ sont les valeurs propres de f et si leurs multiplicités sont notées $m_1, \dots, m_p$ respectivement, alors

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{k=1}^{p} m_k \lambda_k \qquad \text{et} \qquad \mathrm{dét}(f) = \prod_{k=1}^{p} (\lambda_k)^{m_k}.$$

Encadrement $1 \leqslant \dim(\mathrm{E}_\lambda(f)) \leqslant \mathrm{mult}(\lambda, f)$.

1.5 Complément si on a le temps : éléments propres des matrices réelles

Si λ est une valeur propre non réelle de A, alors $\overline{\lambda}$ en est une aussi, avec le même ordre de multiplicité.
De plus, si U est un vecteur propre (complexe) de A associé à λ, alors $\overline{\mathrm{U}}$ est un vecteur propre de A associé à $\overline{\lambda}$.
L'application $\mathrm{U} \mapsto \overline{\mathrm{U}}$ est un $\mathbb{R}$-isomorphisme entre les $\mathbb{C}$-espaces propres $\mathrm{E}_\lambda(\mathrm{A})$ et $\mathrm{E}_{\overline{\lambda}}(\mathrm{A})$. On en déduit que ces deux espaces propres ont la même dimension.
Exemple des matrices de rotation.

2 Diagonalisation en dimension finie

2.1 Endomorphisme diagonalisable

Définition (existence d'une base dans laquelle la matrice représentative est diagonale).
Exemple : homothéties, projecteurs et symétries.
Caractérisation : existence d'une base de l'espace vectoriel constituée de vecteurs propres.
Caractérisation sur la somme des dimensions des espaces propres.

Dans le cas où le polynôme caractéristique est scindé, caractérisation par l'égalité entre les dimensions d'espaces propres et les multiplicités.

Si le polynôme caractéristique est scindé, à racines simples, alors l'endomorphisme est diagonalisable et ses espaces propres sont de dimension 1.

2.2 Matrice diagonalisable

Définition (l'endomorphisme $\mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est diagonalisable).

Caractérisation : la matrice est semblable à une matrice diagonale.

Reformulation de toutes les caractérisations et propriétés du paragraphe précédent.

Si A représente un certain endomorphisme f d'un certain $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n, alors la diagonalisabilité de f équivaut à la diagonalisabilité de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2.3 Puissances d'une matrice diagonalisable

Formule $(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP})^k = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{M}^k\mathrm{P}$.

Calcul de M^k dans le cas où M est diagonalisable.

Suite définie par une relation de récurrence linéaire à coefficients constants : traduction matricielle ; lien avec le calcul des puissances d'une matrice ; résolution dans le cas où l'équation caractéristique est associée à un polynôme scindé, à racines simples.

3 Trigonalisation en dimension finie

3.1 Endomorphisme trigonalisable

Définition (représentation matricielle triangulaire supérieure).

Interprétation en termes de sous-espaces stables.

Remarque sur le fait que les matrices triangulaires inférieures eussent sis tout autant.

Théorème : un endomorphisme est trigonalisable si, et seulement si, son polynôme caractéristique est scindé.

3.2 Matrice trigonalisable

Définition (matrice semblable à une matrice triangulaire supérieure).

Toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Exemple de trigonalisation : la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ est semblable à $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

3.3 Relation de récurrence d'ordre deux à coefficients constants

Cas où l'équation caractéristique n'a qu'une solution.

3.4 Un peu de calcul numérique (si on a le temps)

Détermination de la valeur propre de plus grand module à l'aide du quotient $\mathrm{tr}(\mathrm{A}^{k+1})/\mathrm{tr}(\mathrm{A}^k)$ (dans des cas où elle est unique).

Programme de colles n° 6 (du lundi 12 décembre 2016 au vendredi 6 janvier 2017)

Tout ce chapitre.

Pas de question de cours imposée.
