Problème 1 (**)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{J}_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n}$.

Le but de cet exercice est d'obtenir un développement asymptotique de J_n quand n tend vers $+\infty$.

Première partie

Question 1. Justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1+u}\,\mathrm{d}u$. Sa valeur est notée c.

Question 2. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que J_n tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$.

Question 3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prouver l'égalité $\mathrm{J}_n - 1 + \dfrac{1}{n}\ln(2) = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_0^1 \frac{1-u^{1/n}}{1+u}\,\mathrm{d}u$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit alors sur $]0,1]$ la fonction $f_n : t \mapsto n \times \left(1 - u^{1/n}\right)$.

Question 4. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\geqslant 1}$ converge simplement sur $]0,1]$ vers la fonction $u \mapsto -\ln(u)$.

Question 5. Pour tout $x \leqslant 0$, prouver la majoration $|1 - \mathrm{e}^x| \leqslant |x|$.

Question 6. À l'aide du théorème de convergence dominée, montrer que $n^2\left(\mathrm{J}_n - 1 + \dfrac{1}{n}\ln(2)\right)$ tend vers c quand n tend vers $+\infty$.

Bilan

On a alors obtenu le développement asymptotique

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1+t^n} = 1 - \frac{\ln(2)}{n} + \frac{c}{n^2} + \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Deuxième partie

Le but de cette partie est de calculer la valeur de c. On donne la valeur $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Question 7. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$.

Question 8. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 u^k \ln(u)\,\mathrm{d}u$ montrer qu'elle vaut $-\dfrac{1}{(k+1)^2}$.

Question 9. Au moyen du théorème de convergence dominée, montrer que $\displaystyle\int_0^1 \frac{-\ln(u)}{1+u}\left(1-(-u)^n\right)\,\mathrm{d}u$ tend vers c quand n tend vers $+\infty$.

Question 10. En déduire la valeur de c.

Exercice 1. (*) On pose $\mathrm{F}(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

Question 11. Justifier que la fonction F est définie sur $\mathbb{R}$.

Question 12. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Question 13. Obtenir une expression explicite de la fonction F'' puis de la fonction F.

Problème 2 (**)

Pour tout x dans $]1,+\infty[$, on note

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^x}.$$

On a vu en classe que $\zeta(x)$ est équivalent à $\dfrac{1}{x-1}$ quand x tend vers 1. Le but de ce problème est d'obtenir le terme suivant dans le développement asymptotique.

Pour tout x dans $[1,+\infty[$ et tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$u_n(x)=\frac{1}{n^x}-\int_n^{n+1}\frac{1}{t^x}\,\mathrm{d}t.$$

En cas d'existence, on pose

$$\mathrm{U}(x)=\sum_{n=1}^{+\infty}u_n(x).$$

Question 14. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose

$$m_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n).$$

À l'aide de la série $\sum_{n\geqslant 2}(m_n-m_{n-1})$, justifier que la suite $(m_n)_{n\geqslant 1}$ converge. Sa limite est notée γ (c'est la *constante d'Euler*).

Question 15. Montrer l'existence de $\mathrm{U}(1)$ et exprimer sa valeur à l'aide de γ.

Question 16. Pour tout x dans $]1,+\infty[$, montrer l'existence de $\mathrm{U}(x)$ et exprimer sa valeur à l'aide de $\zeta(x)$.

Question 17. Soit n dans $\mathbb{N}^*$.

a. On fixe x dans $[1,2]$. Pour tout t dans $[n,n+1]$, prouver l'encadrement

$$0\leqslant\frac{1}{n^x}-\frac{1}{t^x}\leqslant\frac{x}{n^{x+1}}.$$

b. En déduire un majorant de $||u_n||_\infty^{[1,2]}$.

Question 18. Prouver que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1}u_n$ converge normalement sur le segment $[1,2]$.

Question 19. Prouver que la fonction U est continue sur le segment $[1,2]$.

Question 20. Prouver que $\zeta(x)-\dfrac{1}{x-1}$ possède une limite finie quand x tend vers 1 et exprimer cette limite en fonction de γ.

Exercice 2. (**) Soit $\mathrm{A}\in\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Question 21. Montrer qu'il existe une suite $(\mathrm{M}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui converge vers la matrice A.

Exercice 3. (*) Trouver la partie entière de $\sum_{n=1}^{10^9}\dfrac{1}{n^{2/3}}$.
