# PC* 26 - DEVOIR N$^{\text{o}}$ 10

corrigé

**Effet Marangoni**
inspiré de divers documents

**1.** L'élément considéré est soumis à $\vec{F_1} = \gamma(y+dy)\ell\vec{u}_y$ de la part du fluide supérieur et à $\vec{F_2} = -\gamma(y)\ell\vec{u}_y$ de la part du fluide inférieur.

$$d\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = (\gamma(y+dy) - \gamma(y))\ell\vec{u}_y = \ell\, d\gamma\, \vec{u}_y = \ell\, c\, dy\, \vec{u}_y$$

Comme $dS = \ell\, dy$, on a $d\vec{F} = c\, dS\, \vec{u}_y$.

**2.** La loi de Newton donne $d\vec{F}_{\text{visq}} = -\gamma\frac{\partial v}{\partial x}(h,y)\, dS\, \vec{u}_y$. Les forces de pression ont pour somme $d\vec{F}_P = (P(h,y) - P_0)dS\vec{u}_x$.

**3.** Comme cet élément est de masse nulle, le PFD s'écrit $\sum \vec{F} = 0$ c'est-à-dire $d\vec{F} + d\vec{F}_{\text{visq}} + d\vec{F}_P = \vec{0}$. En projetant, on obtient :

$$\begin{cases} c\, dS - \gamma\frac{\partial v}{\partial x}(h,y)\, dS = 0 \\ (P(h,y) - P_0)\, dS = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}(h,y) = \frac{c}{\gamma} \\ P(h,y) = P_0 \end{cases} .$$

**4.** L'accélération est donnée par $\vec{a} = \frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v}$.

— l'écoulement est stationnaire : $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{0}$ ;

— $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}) = v\frac{\partial}{\partial y}$ et $(\vec{v}\cdot\vec{\nabla})\vec{v} = v\frac{\partial}{\partial y}(v(x)\vec{u}_y) = \vec{0}$ car $\vec{v}$ ne dépend pas de $y$.

Donc $\vec{a} = \vec{0}$ partout dans cet écoulement.

**5.** Comme $\frac{D\vec{v}}{Dt} = 0$, l'équation de Navier-Stokes s'écrit $\vec{0} = -\vec{\nabla}P + \rho\vec{g} + \eta\Delta\vec{v}$ avec $\Delta\vec{v} = \frac{d^2v}{dx^2}\vec{u}_y$. En projection on obtient

$$\begin{cases} 0 = -\frac{\partial P}{\partial x} \\ 0 = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g + \eta\frac{d^2v}{dx^2} \end{cases} . \tag{1}$$

**6.** En intégrant la première des relations (1), on obtient $P(x,y) = K(y)$ et grâce à $P(h,y) = P_0$, on trouve $K(y) = P_0$ donc $P(x,y) = P_0$.

**7.** En $x = 0$, la condition d'adhérence du fluide visqueux donne $v(0) = 0$. En $x = h$, on a d'après la question 3 : $\frac{\partial v}{\partial x}(h) = \frac{c}{\eta}$.

**8.** La seconde ligne des relations (1) s'intègre en $v = \frac{\rho g}{\eta}\frac{x^2}{2} + Ax + B$. Comme $v(0) = 0$, $B = 0$. Comme $\frac{dv}{dx}(h) = \frac{c}{\eta}$, $\frac{\rho g}{\eta}h + A = \frac{c}{\eta}$ donc $A = \frac{c}{\eta} - \frac{\rho g h}{\eta}$ et

$$\boxed{v = \frac{\rho g}{2\eta}x^2 + \left(\frac{c}{\eta} - \frac{\rho g h}{\eta}\right)x} .$$

**9.** Le calcul de $D_v = \int_0^h v(x)\ell\, dx$ donne $\boxed{D_v = \frac{\ell h^2}{\eta}\left(\frac{c}{2} - \frac{\rho g h}{3}\right)}$.

**10.** $D_v > 0$ si et seulement si $c > c_{\text{lim}}$ avec $\boxed{c_{\text{lim}} = \frac{2}{3}\rho g h}$.

**11.** Pour $c = c_{\text{lim}}$,

$$v = \frac{\rho g}{2\eta}(x^2 - \frac{2}{3}xh) = \frac{\rho g}{\eta}x\left(\frac{x}{2} - \frac{h}{3}\right) .$$

Cette vitesse $v$ s'annule pour $x = \frac{2}{3}h$ et passe par un minimum pour $x = h/3$. La nullité du débit s'exprime par le fait que l'aire sous la partie négative de la courbe possède la même valeur absolue que l'aire sous la partie positive. Près de l'interface, le fluide est tiré vers le haut par le gradient de tension superficielle. Plus loin de l'interface, c'est l'effet gravitaire qui domine et le fluide descend.

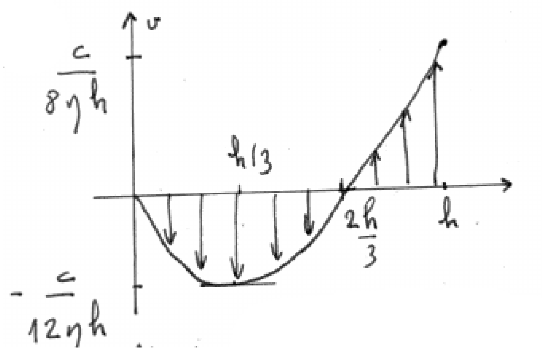



Figure 1 – Graphique de $v$ en fonction de $x$.

# I Effet Marangoni thermique

**1.** $c = \frac{d\gamma}{dx} = -b\gamma_0 \frac{dT}{dx}$.

**2.** Il suffit d'adapter les relations de la question 3 en inversant les rôles respectifs des coordonnées $x$ et $y$.

$$P(x,h) = P_0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y}(h) = \frac{c}{\eta}$$

**3.** En pojection, l'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\begin{cases} 0 = -\partial_x P + \eta \frac{d^2 v}{dy^2} \\ 0 = -\partial_y P - \rho g \end{cases}$$

En tenant compte de la condition de bord $P(x,h) = P_0$, la projection selon $\vec{u}_y$ s'intègre en $P = P_0 - \rho g(y-h)$. Comme $\partial_x P = 0$, la première projection devient $\frac{d^2v}{dy^2} = 0$ et s'intègre en $v = Ay + B$. Comme $v(0) = 0$, $B = 0$ et l'autre condition de bord donne $A = \frac{c}{\eta}$. Finalement $\boxed{v = \frac{c}{\eta} y}$.

Comme $c = -\gamma_0 b \frac{dT}{dx}$, $v$ est de signe opposé à $dT/dx$. L'écoulement se fait vers la région froide.

**4.** Comme dans la question 3, $P = P_0 - \rho g(y-h)$ mais $h$ dépend ic de $x$. On a bien un gradient de pression selon $\vec{u}_x$ :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \rho g \frac{dh}{dx} \quad .$$

**5.** La projection de l'équation de Navier-Stokes sur $\vec{u}_x$ s'écrit $\frac{d^2v}{dy^2} = \frac{\rho g}{\eta}\frac{dh}{dx}$ et s'intègre en $v = \frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx} y^2 + Dy + D'$. L'adhérence en $y = 0$ donne $D' = 0$.

**6.** Le débit vers la droite est $D_v = \int_0^h l v(y)\, dy$.

$$D_V = l\left[\frac{\rho g}{2\eta}\frac{dh}{dx}\frac{h^3}{3} + \frac{Dh^2}{2}\right]$$

L'écoulement en profondeur compense l'effet Marangoni si $D_v = 0$ c'est-à-dire si

$$\boxed{D = -\frac{\rho g h}{3\eta}\frac{dh}{dx}} \quad .$$

**7.** La condition de bord $\partial_y v(h) = c/\eta$ évaluée avec $h \simeq h_0$ donne

$$\frac{\rho g}{\eta}\frac{dh}{dx} h_0 + D = \frac{c}{\eta} \quad .$$

En éliminant $D$, on trouve

$$\frac{dh}{dx} = \frac{3}{2}\frac{c}{\rho g h_0} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{\frac{dh}{dx} = -\frac{3}{2}\frac{b\gamma_0}{\rho g h_0}\frac{dT}{dx}} \quad .$$

**8.**

$$\frac{dh}{dx} = 0,0525 \qquad \alpha = \arctan(0,0525) = 3.0°$$

**Glissement des skis**

corrigé

1. Comme l'écoulement est incompressible, div $\vec{u} = 0$ donc $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ ; $u$ ne dépend pas de $x$.
2. L'équation de Navier-Stokes s'écrit :

$$\rho\left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u}\right) = -\vec{\text{grad}}\,p + e\vec{g} + \eta\frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial y^2}$$

En régime permanent, $\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = 0$ et $(\vec{u}\cdot\vec{\nabla})\vec{u} = u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$. En projection sur $\vec{e}_x$, on obtient :

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta\frac{d^2 u}{dy^2}$$

Comme $\frac{\partial p}{\partial x}$ est supposé nul, on a $\frac{d^2u}{dy^2} = 0$. Avec les conditions de bord $u(0) = 0$ et $u(h) = v$, on obtient :

$$u = v\frac{z}{h}$$

3. La force visqueuse $R_{x_1}$ en $z = h$ est donnée par :

$$R_{x_1} = -\eta\frac{\partial u}{\partial y}(h)A_1 = -\eta A_1\frac{v}{h}$$

4. Le patin exerce $-R_{x_1}$ sur les particules fluides en contact avec lui, de vitesse $v$. Donc :

$$P_1 = -R_{x_1}v = \eta A_1\frac{v^2}{h}$$

5. Le nombre de Reynolds est donné par :

$$\text{Re} = \frac{vh}{\nu} = 0,06$$

Cette valeur assez basse valide l'hypothèse d'un écoulement laminaire.

6. (a) La pression aux frontières de ce système est uniforme, notons-la $P_0$. Le travail des forces de pression est :

$$\delta W = -P_0\delta V$$

Comme l'eau est incompressible, la variation de volume $\delta V$ de ce système fermé est nulle et $\delta W = 0$.

(b) En appliquant le premier principe à ce système fermé :

$$dU = \delta W + \delta Q$$

En régime permanent et en négligeant les effets de bord, $dU = 0$, donc $\delta Q = -\delta W = 0$. La puissance thermique cédée par ce système est donc :

$$P_{th} = -\frac{\delta Q}{\delta t} = -P_1 \qquad P_{th} = \eta\frac{A_1 v^2}{h}$$

C'est la puissance dissipée par les forces visqueuses.

7. Pour la masse de glace qui fond pendant $\delta t$, $dH = \delta Q$ :

$$L_f dm = P_{th}\delta t$$

Or $dm = \rho A_1 dh$, donc :

$$dh = \frac{P_{th}}{\rho A_1 L_f}dt \qquad \frac{dh}{dt} = \frac{\eta v^2}{\rho h L_f} \quad .$$

**8.** L'incompressibilité se traduit par $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

En ordre de grandeur, cela donne : $\frac{U}{D} \simeq \frac{W}{h}$ donc $U \simeq \frac{W}{h} D$.

**9.** Les termes diffusifs sont ceux qui comprennent $\eta$ :

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \simeq \frac{U}{h^2} \quad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} \simeq \frac{U}{D^2} \quad \frac{u_r}{r^2} \simeq \frac{U}{D^2} \quad \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \simeq \frac{U}{h^2}$$

Numériquement, $D = 1000\,h$ donc $\frac{1}{D^2} = 10^{-6}\,\frac{1}{h^2}$. Le dernier terme est donc dominant.

**10.** Le terme visqueux $Q_{\text{diff}}$ a été estimé ci-dessus. Les termes convectifs sont :

$$Q_{\text{conv}_1} = \rho u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} \simeq \rho \frac{U^2}{D} \quad \text{et} \quad Q_{\text{conv}_2} = \rho u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \simeq \rho \frac{U^2}{D}$$

Calculons le quotient

$$\frac{Q_{\text{diff}}}{Q_{\text{conv}}} \simeq \frac{\eta \frac{U}{h^2}}{\rho \frac{U^2}{D}} \simeq \frac{\eta D}{\rho U h^2}$$

Avec $U = \frac{W}{h} D$ et $W = h/\tau$, on obtient :

$$\frac{Q_{\text{diff}}}{Q_{\text{conv}}} \simeq \frac{\eta}{\rho W h} = \frac{\nu \tau}{h^2} \quad ;$$

Numériquement :

$$\frac{Q_{\text{diff}}}{Q_{\text{conv}}} \simeq \frac{2 \cdot 10^{-6} \cdot 10^{-4}}{(1 \cdot 10^{-7})^2} \simeq 2 \cdot 10^4$$

On peut donc négliger les termes convectifs.

**11.** $\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} \simeq \rho \frac{U}{\tau}$ et $U \simeq \frac{D}{\tau}$ donc $\tau \simeq \frac{D}{U}$. Ainsi, $\rho \frac{\partial u_r}{\partial t} \simeq \rho \frac{U^2}{D}$ : même ordre de grandeur que les termes convectifs, on peut le négliger aussi.

**12.** L'équation de mouvement selon $r$ se réduit à :

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \eta \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \quad .$$

**13.** Comme $p$ ne dépend pas de $z$, on intègre pour obtenir :

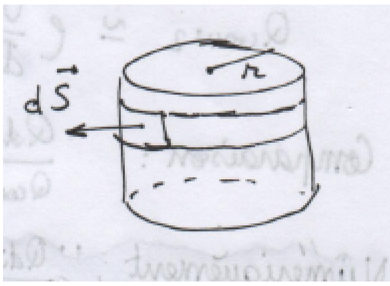
$$u_r = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx} z^2 + Az + B$$

On trouve $A$ et $B$ avec les conditions aux limites $u_r = 0$ en $z = 0$ et $z = h$. Finalement :

$$u_r = \frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dr}(z^2 - zh)$$

**14.** Le débit volumique $D_v$ est donné par :

$$D_v = \int \vec{u} \cdot dS \vec{u}_r = \int_0^h u_r \, 2\pi r \, dz \qquad \boxed{D_v = -\frac{\pi r h^3}{6\eta}\frac{dp}{dr}} \quad .$$



**15.** La conservation du débit volumique indique que le volume expulsé latéralement est égal à celui perdu au sommet du cylindre par diminution de $h$ :

$$D_v = -\pi r^2 \frac{dh}{dt} \quad .$$

**16.** En identifiant les deux expressions de $D_v$, on obtient :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{6\eta}{h^3} r \frac{dh}{dt} \quad .$$

On intègre avec la condition $P(r = \frac{D}{2}) = P_0$ pour trouver :

$$P = P_0 + \frac{3\eta}{h^3}\frac{dh}{dt}\left(r^2 - \frac{D^2}{4}\right)$$

**17.** La résultante des forces de pression $R_p$ est :

$$R_p = \int P\,dS = \int P(r)\,2\pi r\,dr \quad .$$

On obtient :

$$\boxed{R_p = \pi\frac{D^2}{4}P_0 - \frac{3\pi\eta}{h^3}\frac{dh}{dt}\frac{D^4}{32}} \quad .$$

**18.** On identifie le second terme de $R_p$ à $R_{z1}$ donc

$$R_{z1} = -\frac{3\pi\eta}{h^3}\frac{D^4}{32}\frac{dh}{dt} \qquad R_{z1}\,dt = -\frac{3\pi\eta D^4}{32}\frac{dh}{h^3} \quad .$$

On intègre à partir de $t = 0$ pour obtenir

$$R_{z1}t = \frac{3\pi\eta D^4}{64}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) \quad \text{ou encore} \quad t = h_0^2\tau_1\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_0^2}\right) \quad \text{d'où} \quad \boxed{h = \frac{h_0}{\sqrt{1 + \frac{t}{\tau_1}}}}$$

**19.** $\tau_1 = 1{,}3.10^{-4}$ s et $h(\tau) = 75$ nm.

**20.** On reprend l'expression de $D_v$ établie dans la question 15, et on évalue en $r = D/2$. On élimine $dh/dt$ en le reliant à $R_{z1}$ comme dans la question 18.

$$D_v = -\frac{\pi D^2}{4} \times \frac{-32h^3 R_{z1}}{3\pi\eta D^4} = \frac{8h^3 R_{z1}}{3\eta D^2} \quad .$$

**21.** En ajoutant les effets de la fusion et de l'expulsion, on obtient l'équation suivante pour l'évolution de $h$ :

$$\frac{dh}{dt} = \frac{C_1}{h} - C_2 h^3 \qquad \text{avec} \quad C_1 = \frac{\eta v^2}{\rho L_f} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{32 R_{z1}}{3\pi\eta D^4} \quad .$$

**22.** $h_{\lim}$ est défini par $\frac{dh}{dt} = 0$ ce qui conduit à

$$h_{\lim} = \sqrt[4]{\frac{C_1}{C_2}} \quad .$$

**23.** D'après la partie A, on a :

$$R_{x_1} = \eta A_1 \frac{v}{h_{\lim}}$$

Comme $C^1 \propto v^2$ et $h_{\lim} \propto C_1^{1/2}$, $h_{\lim} \propto \sqrt{v}$, puis on en déduit que :

$$R_{x_1} \propto \sqrt{v} \quad .$$

Ce résultat correspond aux observations expérimentales.

**Lubrification hydrodynamique**
corrigé

**1.** div $\overrightarrow{v} = 0$ s'écrit $\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0$

**2.**

$$\left|\frac{\partial v_y}{\partial y}\right| \sim \frac{V_t}{h} \qquad \left|\frac{\partial v_x}{\partial x}\right| \sim \frac{V_0}{l}$$

D'après la relation de la question précédente, $\frac{V_t}{h_t} \sim \frac{V_0}{l} \rightarrow V_t \sim \frac{h_t}{l} V_0 \ll V_0$ : on peut négliger la vitesse transversale, $\overrightarrow{v} \simeq v_x \overrightarrow{u_x}$.

**3.** (a)

$$\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left[\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right] \qquad 0 = -\frac{\partial p}{\partial y} \tag{2}$$

(b)

$$\left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2}\right| \sim \frac{V_0}{l^2} \qquad \left|\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}\right| \sim \frac{V_0}{h^2}$$

Comme $h \ll l$, $\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2}$.

(c) On a $Re = \mu V_0 h/\eta$ et $\alpha \sim h/l$ donc $Re\,\alpha \sim \nu V_0 h^2/(\eta l)$.

$$\left|\mu v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}\right| \sim \mu \frac{V_0^2}{l} \qquad \left|\eta \frac{\partial v_x}{\partial y^2}\right| \sim \eta \frac{V_0}{h^2}$$

Le rapport de ces deux termes a donc pour ordre de grandeur $\frac{\mu V_0 h^2}{\eta l} \sim Re\,\alpha \ll 1$.

(d) En négligeant les deux termes dont on vient de montrer la petitesse, les projections de Navier-Stokes deviennent

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad \text{et} \frac{\partial p}{\partial y} = 0$$

**4.** $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ donc $p$ ne dépend que de $x$. On pose $K(x) = p'(x) = \frac{\partial p}{\partial x}$.

**5.** Les conditions d'adhésion du fluide visqueux aux parois s'écrivent : en $y = 0$, $v_x = V_0$ ; en $y = h$, $v_x = 0$.

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = \frac{K(x)}{\eta} \rightarrow v_x = \frac{K(x)}{\eta} \frac{y^2}{2} + Ay + B$$

Les conditions de bord permettent de trouver $B = V_0$ et $A = -\frac{Kh}{2\eta} - \frac{V_0}{h}$ de sorte que

$$v_x = \frac{K}{\eta} \frac{y^2}{2} - \left(\frac{Kh(x)}{2\eta} + \frac{V_0}{h(x)}\right) y + V_0 = V_0 \left(1 - \frac{y}{h(x)}\right) \left(1 - \frac{Kh(x)^2}{2\eta V_0} \frac{y}{h(x)}\right)$$

**6.**

$$q_v = \int_0^{h(x)} v_x L dy = L \left[\frac{V_0 h}{2} - \frac{1}{12} \frac{Kh^3}{\eta}\right] \quad \text{après calcul}$$

Ce débit se conserve, il ne dépend pas de $x$ car le fluide est incompressible.

**7.** (a) Du résultat de la question précédente, on tire

$$\frac{dp}{dx} = K = \frac{6V_0\eta}{h^2} - 12 \frac{\eta q_v}{Lh^3}$$

Comme l'énoncé indique qu'il faut prendre $h$ comme variable d'intégration on calcule $\frac{dp}{dh} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dh} = K \times \frac{-1}{\alpha}$. donc

$$\frac{dp}{dh} = \frac{dp}{dx}\frac{dx}{dh} = K \times \frac{-1}{\alpha} = -\frac{6V_0\eta}{\alpha h^2} + \frac{12 q_v \eta}{\alpha L h^3}$$

qui s'intègre pour donner

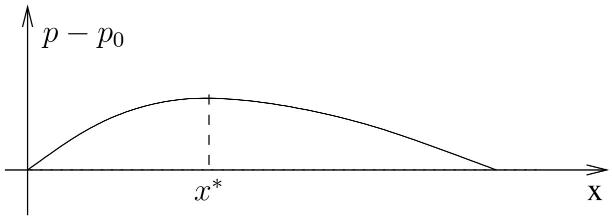
$$p - p_0 = \frac{6V_0\eta}{\alpha}\left(\frac{1}{h} - \frac{1}{h_1}\right) - \frac{6q_v\eta}{\alpha L}\left(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) \quad .$$

(b) On a $p(h_2) = p_0$ soit $p(h_2) - p_0 = 0$. En évaluant la relation précédente en $h = h_2$, on obtient :

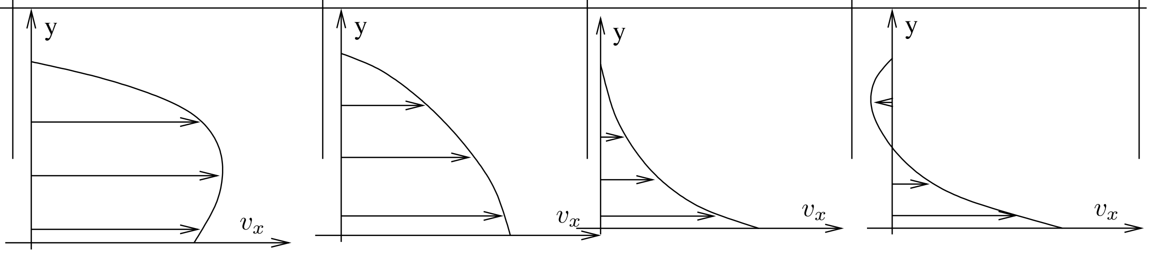
$$0 = \frac{6V_0\eta}{\alpha}\left(\frac{-1}{h_2} + \frac{1}{h_1}\right) + \frac{6q_v\eta}{\alpha L}\left(\frac{1}{h_2^2} - \frac{1}{h_1^2}\right) \to q_v = LV_0\frac{h_1h_2}{h_1+h_2} = \frac{1}{2}LV_0h^* \quad .$$

(c) En utilisant l'expression précédente de $q_v$, on obtient $K(x) = \frac{6V_0\eta}{h(x)^3}(h(x) - h^*)$. Il suffit de reporter ce résultat dans l' expression de $v$ trouvée à la question 5, et dans celle de $p$ trouvée à la question 6, pour obtenir les expressions de $v_x$ et $p$ fournies par l'énoncé. Pour $p$, le calcul n'est pas évident, mais il n'est pas demandé !

(d) Le sens de variation de $p(x)$ est donné par le signe de $K$ : Pour $h > h^*$, $K > 0$ donc $p(x)$ croît. C'est le contraire pour $h < h^*$. La pression présente donc un maximum à l'abscisse $x^*$ telle que $h = h^*$.




(e) Comme $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{K}{\eta} \propto (h - h^*)$, $v_x(y)$ varie linéairement pour $h = h^*$ et la concavité du profil de vitesse est dans un sens ou dans l'autre selon que $h > h^*$ ou $h < h^*$.
On calcule $\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, 0) = \frac{v_0}{h^2}(3h^* - 4h)$ et $\frac{\partial v_x}{\partial y}(x, h) = \frac{v_0}{h^2}(2h - 3h^*)$. D'où le tableau de signe suivant :

| $h$ | $h_2$ – $3h^*/4$ | $3h^*/4$ – $h^*$ | $h^*$ – $3h^*/2$ | $3h^*/2$ – $h_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ | − | − | + | + |
| $\frac{\partial v}{\partial y}(x,0)$ | + | − | − | − |
| $\frac{\partial v}{\partial y}(x,h)$ | − | − | − | + |
| profil |  | | | |



Avec les valeur numériques de l'énoncé, $3h^*/2 = h_1$ et $3h^*/4 = h_2$, donc on observer seulement les deux courbes du milieu. Attention : $h$ décroît avec $x$, donc les courbes sont inversées si on met $x$ en abscisse.

**8.** La résultante des forces de pression s'exprime par $F_p = \int_0^l (p(x) - p_0)Ldx$ . Numériquement $F_p = 6620\,\text{N}$. Pour un film plan, $\beta \to 1$. En posant $\beta = 1 + \epsilon$, des développements limités à l'ordre 3 donnent

$$\frac{1}{(\beta-1)^2}\left[\ln\beta - 2\frac{\beta-1}{\beta+1}\right] \sim \frac{\epsilon}{12}$$

donc $F_p \to 0$. On retrouve dans ce cas l'écoulement de Couette plan.

**9.** En utilisant la loi de Newton, la résultante des forces visqueuses sur la paroi s'exprime par

$$F_v = -\int_0^l \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} L dx = 19,3\,\mathrm{N} \quad .$$

On calcule $f = F_v/F_p = 2,9.10^{-3}\,\mathrm{N}$. $F_p$ représente une force normale, $F_v$ une force tangentielle. Le coefficient $f$ joue donc un rôle analogue au coefficient de frottement dynamique intervenant dans les lois de Coulomb. Mais il est bien plus faible que celui qu'on obtient usuellement entre deux solides, de l'ordre de 0,1 pour un contact acier du acier. C'est tout l'intérêt de la lubrification.