

Chapitre 12 — espaces euclidiens (suite et fin)

1 Isométries vectorielles

1.1 Définition et caractérisation

Une isométrie vectorielle d'un espace euclidien est un endomorphisme qui préserve la norme euclidienne. On parle aussi d'automorphisme orthogonal.

Caractérisation : ça équivaut à préserver le produit scalaire ; ça équivaut à envoyer une base orthonormée sur une base orthonormée. Stabilité par composition, par passage à l'inverse.

Groupe orthogonal $O(E)$. Exemple : les symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par une isométrie vectorielle, alors F^\perp est stable également.

1.2 Matrices orthogonales

Ce sont les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ canoniquement associées aux isométries vectorielles de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Caractérisation : ce sont les matrices de passage entre deux bases orthonormales de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ (ou de n'importe quel espace euclidien de dimension n) ; ce sont les matrices dont les colonnes forment une base orthonormale

Caractérisation : ce sont les matrices M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant la relation $M^T \times M = I_n$ (ou, de manière équivalente, la relation $M \times M^T = I_n$). Groupe orthogonal $O(n)$, également noté $O_n(\mathbb{R})$.

Caractérisation matricielle des automorphismes orthogonaux.

Déterminant des matrices orthogonales. Groupe spécial orthogonal $SO(n)$, également noté $SO_n(\mathbb{R})$.

Orientation d'un espace vectoriel. Bases orthonormées directes.

1.3 Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Matrices de $O_2(\mathbb{R})$, de $SO_2(\mathbb{R})$. Commutativité de $SO_2(\mathbb{R})$. Classification des isométries vectorielles de \mathbb{R}^2 .

1.4 Folklore

Inégalités $|a_{i,j}| \leq 1$ et $\left| \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{i,j} \right| \leq n$. Les valeurs propres complexes sont de module 1. L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est fermé et borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Si A est une matrice orthogonale, alors les endomorphismes $M \mapsto AM$ et $M \mapsto MA$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont des isométries.

2 Endomorphismes auto-adjoints (ou symétriques)

2.1 Définition et caractérisation

Définition d'un endomorphisme auto-adjoint. Caractérisation par la représentation matricielle dans une base orthonormée.

Projections orthogonales. Symétries orthogonales.

Si un sous-espace vectoriel F est stable par un endomorphisme symétrique, alors F^\perp l'est aussi.

Espace vectoriel $\mathcal{S}(E)$. Isomorphisme avec $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

2.2 Réduction des matrices symétriques

Les espaces propres d'un endomorphisme symétrique sont deux à deux orthogonaux.

Les valeurs propres complexes d'une matrice symétrique réelle sont réelles.

Le polynôme caractéristique d'un endomorphisme symétrique est scindé sur \mathbb{R} .

Théorème spectral : tout endomorphisme symétrique d'un espace euclidien admet une base orthonormée de vecteurs propres.

Traduction matricielle : pour toute matrice symétrique réelle A , il existe une matrice orthogonale P telle que la matrice $P^{-1}AP$ soit diagonale.

Exemple d'une matrice symétrique complexe non diagonalisable.

2.3 Endomorphisme auto-adjoint positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E . Dire que f est positif signifie que

$$\forall x \in E, \quad (x|f(x)) \geq 0.$$

On montre que ça équivaut à ce que les valeurs propres de f soient positives.

Matrice symétrique positive.

Ensembles $\mathcal{S}^+(E)$ et $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$. Bijection entre ces ensembles.

Complément : matrices de Gram.

2.4 Endomorphisme auto-adjoint défini positif

Soit f un endomorphisme auto-adjoint de E . Dire que f est défini positif signifie que

$$\forall x \in E \setminus \{0_E\}, \quad (x|f(x)) > 0.$$

On montre que ça équivaut à ce que les valeurs propres de f soient strictement positives.

Matrice symétrique définie positive.

Ensembles $\mathcal{S}^{++}(E)$ et $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Bijection entre ces ensembles.

Complément : les matrices symétriques définies positives sont les matrices de Gram de familles libres.

2.5 Complément : racine carrée d'un endomorphisme auto-adjoint positif

Existence et unicité.

Programme de colles n° 9 (du lundi 2 au vendredi 13 février 2026)

Tout ce chapitre.
