

Exercice 1. ()** a. Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E . Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) $\forall x \in E, (x|u(x)) = 0$;
- (ii) $\forall (x, y) \in E^2, (x|u(y)) = -(y|u(x))$;
- (iii) dans toute base orthonormée de E , la matrice représentative de u est antisymétrique;
- (iv) il existe une base orthonormée de E dans laquelle la matrice représentative de u est antisymétrique.

Les endomorphismes de E de ce type sont appelés *antisymétriques*.

b. Pour tout vecteur a de \mathbb{R}^3 , vérifier que l'endomorphisme $\varphi_a : x \mapsto a \wedge x$ de \mathbb{R}^3 est antisymétrique pour le produit scalaire usuel.

c. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme antisymétrique de \mathbb{R}^3 est de la forme φ_a pour un certain a de \mathbb{R}^3 .

d. Soit a un vecteur non nul de \mathbb{R}^3 . On note $\alpha = a/||a||$. On choisit un vecteur β unitaire orthogonal à α et on pose $\gamma = \alpha \wedge \beta$, si bien que le triplet (α, β, γ) est une base orthonormale de \mathbb{R}^3 .

Écrire la matrice de φ_a dans cette base.

e. Pour tout t réel et tout vecteur x de \mathbb{R}^3 , calculer

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!} (\varphi_a)^n(x).$$

Exercice 2. (*) Déterminer la matrice de la projection orthogonale sur le plan P de \mathbb{R}^3 d'équation $x - y + 2z = 0$ relativement à la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Exercice 3. ()** Soit p un projecteur d'un espace euclidien E . Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

- (i) l'endomorphisme p est un projecteur orthogonal;
- (ii) pour tout $x \in E, ||p(x)|| \leq ||x||$.

Exercice 4. (*) Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique réelle, dont on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres (répétées selon leur multiplicité).

Montrer l'égalité
$$\sum_{1 \leq i,j \leq n} (a_{i,j})^2 = \sum_{k=1}^n (\lambda_k)^2.$$

Exercice 5. ()** Soit f un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien de dimension n . On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de f avec la condition $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

- a. Montrer l'encadrement $\lambda_1 ||x||^2 \leq (x|f(x)) \leq \lambda_n ||x||^2$ pour tout x de E .
- b. Montrer que l'égalité $(x|f(x)) = \lambda_1 ||x||^2$ a lieu si et seulement si x appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_1 \text{Id}_E)$.
- c. Montrer que l'égalité $(x|f(x)) = \lambda_n ||x||^2$ a lieu si et seulement si x appartient à $\text{Ker}(f - \lambda_n \text{Id}_E)$.
- d. (***) Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. On note \mathcal{G}_k l'ensemble des sous-espaces vectoriels de E de dimension k . Montrer la formule suivante

$$\lambda_k = \min_{F \in \mathcal{G}_k} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{(x|f(x))}{||x||^2}.$$

Exercice 6. (*)** Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ une matrice symétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On note B la matrice $(a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n-1}$, qui est donc une matrice symétrique de $\mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A rangées dans l'ordre croissant et μ_1, \dots, μ_{n-1} celles de B .

Montrer alors les inégalités $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

Exercice 7. ()** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire (\mid) défini par $(P|Q) = \int_{-1}^1 P(t)Q(t) dt$.

Pour tout polynôme réel P , on pose

$$\varphi(P) = ((X^2 - 1)P')'.$$

a. Vérifier que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

b. Pour tout P dans $\mathbb{R}[X]$, prouver l'inégalité $\deg(\varphi(P)) \leq \deg(P)$. En déduire que pour tout n dans \mathbb{N} , l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par φ .

On note φ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ induit par φ .

c. Vérifier que φ_n est un endomorphisme symétrique de $\mathbb{R}_n[X]$. Trouver ses valeurs propres.

d. Trouver une base de diagonalisation dans le cas $n = 3$. Vérifier qu'elle est orthogonale.

e. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = ((X^2 - 1)^k)^{(k)}$. En partant de l'identité

$$((X^2 - 1)^k (X^2 - 1))^{(k+2)} = (((X^2 - 1)^{k+1})')^{(k+1)},$$

calculer $\varphi(P_k)$.

Exercice 8. ()** Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive telle que $B^2 = A$.

2. Pour tout $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, en déduire l'inégalité $\|X\|^4 \leq (X|AX)(X|A^{-1}X)$.

3. On note λ la plus grande valeur propre de A et μ la plus petite. On fixe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}$.

On considère la fonction polynomiale $f_X : s \mapsto (X|AX)s^2 - (\lambda + \mu)(X|X)s + \lambda\mu(X|A^{-1}X)$.

a. On pose $N = -A + (\lambda + \mu)I - \lambda\mu A^{-1}$. Vérifier que N est une matrice symétrique à valeurs propres positives.

b. Déterminer le signe de $f_X(0)$ et de $f_X(1)$.

c. En déduire l'inégalité $(X|AX)(X|A^{-1}X) \leq \frac{(\lambda + \mu)^2}{4\lambda\mu} \|X\|^4$.

Exercice 9. (*) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Soit $C \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. Montrer que AC est diagonalisable.

Indication : utiliser la matrice B de l'exercice 8.

Exercice 10. ()** Soit A une matrice de $GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un unique couple (O, S) de matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant les trois conditions

- $A = OS$;
- la matrice S est symétrique définie positive ;
- la matrice O est orthogonale.

On raisonnera par analyse-synthèse en commençant par déterminer l'unique choix possible pour S .

Exercice 11. ()** Soit u un endomorphisme d'un espace euclidien E .

Démontrer l'existence d'une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que la famille $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit orthogonale.

Exercice 12. (*) Soit A une matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que son spectre est inclus dans $i\mathbb{R}$.

Exercice 13. (*) Soit $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. Montrer que ses coefficients diagonaux sont strictement positifs.

Exercice 14. ()** Soit $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.

Montrer que A est positive si et seulement si pour toute $B \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(AB) \geq 0$.