Propulsion d'un navire par une hélice

1. Dans le référentiel du navire, la position occupée par l'hélice est fixe et l'écoulement est stationnaire.

2. $D_m = \mu S_1 v_1 = \mu S v = \mu S v' = \mu S_2 v_2$.

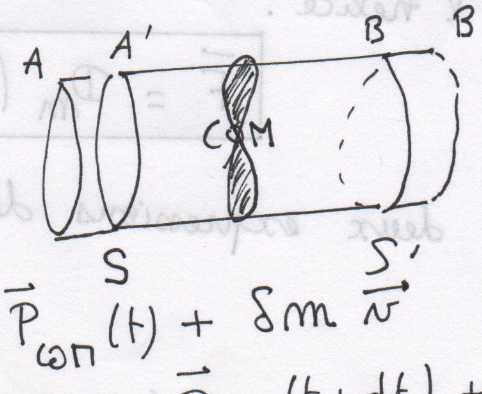
En régime stationnaire, le débit massique se conserve le long du tube de courant. On en déduit en particulier l'égalité $\underline{v = v'}$.

3. Comme l'écoulement est parfait, stationnaire et incompressible, on peut appliquer la relation de Bernoulli sur une ldc allant de S_1 à S :

$$P_a + \frac{1}{2}\mu v_1^2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \boxed{P = P_a + \frac{1}{2}\mu\left(v_1^2 - v^2\right)}$$

De même, en suivant une ldc allant de S' à S_2, on trouve : $\boxed{P' = P_a + \frac{1}{2}\mu\left(v_2^2 - v^2\right)}$

4. On se ramène à un système fermé, domaine particulaire de fluide qu'on suit dans son mouvement.



$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{AB}(t) = \vec{P}_{com}(t) + \delta m\,\vec{v}$$

$$\vec{P}(t+dt) = \vec{P}_{A'B'}(t+dt) = \vec{P}_{com}(t+dt) + \delta m\,\vec{v}'$$

En R.S., $\vec{P}_{com}(t) = \vec{P}_{com}(t+dt)$.

$$d\vec{P} = \vec{P}(t+dt) - \vec{P}(t) = \delta m\left(\vec{v}' - \vec{v}\right) = \vec{0}$$

Le système subit :

- les forces de pression latérales de somme nulle
- $P S \vec{u}_x - P' S \vec{u}_x$
- $\vec{F}$ de la part de l'hélice.

La seconde loi de Newton s'écrit : $\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$, ce qui donne ici $\vec{0} = (P - P') S \vec{u}_x + \vec{F}$

$$\vec{F} = (P' - P) S \vec{u}_x$$

En utilisant les résultats de 3.,

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{2} \mu S \left(v_2^2 - v_1^2 \right) \vec{u}_x}$$

5. On se ramène à nouveau à un système fermé.

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = D_m \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \right)$$

Le système subit :

- les forces de pression P_a sur la surface fermée $S_1 \cup S_{lat} \cup S_2$.

$$\oint P_a \, d\vec{S} = \vec{0}$$

- $\vec{F}$ de la part de l'hélice.

$$D_m \left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1 \right) = \vec{F} \qquad \boxed{\vec{F} = D_m \left(v_2 - v_1 \right) \vec{u}_x}$$

6. On identifie les deux expressions de $\vec{F}$ et on remplace D_m par $\mu S v$.

$$\frac{1}{2} \mu S \left(v_2^2 - v_1^2 \right) = \mu S v \left(v_2 - v_1 \right)$$

On en déduit $\boxed{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}$

7. Appliquons le TPC en utilisant le même domaine de contrôle que dans la question 5. Pour le syst fermé, on a :

$$\mathcal{E}_c(t) = \frac{1}{2} \delta m \, v_1^2 + \mathcal{E}_{c\,com}$$

$$\mathcal{E}_c(t+dt) = \frac{1}{2} \delta m \, v_2^2 + \mathcal{E}_{com}$$

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \frac{1}{2} D_m \left(v_2^2 - v_1^2 \right).$$

Les puissances reçues par ce système sont :

$$\left.\begin{array}{l} \cdot\ P_a S_1 v_1 \text{ en amont} \\ \cdot\ -P_a S_2 v_2 \text{ en aval} \end{array}\right\} \text{somme nulle car } S_1 v_1 = S_2 v_2$$

- 0 sur $\mathcal{S}_{lat}$ car $\vec{v}(M) \perp P_a d\vec{S}_{lat}$
- $\mathcal{P}_{int} = 0$ car le fluide est non visqueux et incompressible
- $\mathcal{P}$ de la part de l'hélice.

Le TPC s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{1}{2} D_m \left(v_2^2 - v_1^2 \right)}$$

8. $\mathcal{P} = \frac{1}{2} D_m \left(v_2 - v_1 \right) \left(v_2 + v_1 \right)$

Comme $v = \frac{v_1 + v_2}{2}$, $\mathcal{P} = D_m v \left(v_2 - v_1 \right)$

Grâce à l'expression de F établie en 5., on voit que

$$\boxed{\mathcal{P} = F v}.$$

On a ainsi retrouvé l'expression usuelle de la puissance d'une force.

L'hélice pousse l'eau vers l'arrière du bateau en lui communiquant de l'énergie. On a donc $\mathcal{P} > 0$, $F > 0$ et $v_2 > v_1$. À cause de la conservation du débit,

$S_2 v_2 = S_1 v_1$ donc $S_2 < S_1$.

C'est bien ce qu'on observe sur le dessin : le tube de courant est plus étroit à droite.

9. La loi de composition des vitesses s'écrit

$$\vec{v}_{R_T} = \vec{v}_{R_N} + \vec{v}_e \quad \text{avec } \vec{v}_e = -U\vec{u}_x$$

$$\vec{v}_{R_N} = \vec{v}_{R_T} + U\vec{u}_x$$

Pour l'eau en amont :

$$\vec{v}_1 = \vec{0} + U\vec{e}_x \qquad \boxed{v_1 = U}$$

Pour l'eau en aval :

$$\vec{v}_2 = w\vec{u}_x + U\vec{e}_x \qquad \boxed{v_2 = w + U}$$

En reportant ces expressions de v_1 et v_2 dans les résultats établis plus haut, on a

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2} = U + \frac{w}{2} \qquad D_m = \mu S\left(U + \frac{w}{2}\right)$$

$$F = D_m w = \mu S\left(U + \frac{w}{2}\right) w$$

$$\mathcal{P} = \mu S\left(U + \frac{w}{2}\right)^2 w$$

10. Par définition, $P_u = F U$

$$\boxed{P_u = \mu S \left(U + \frac{w}{2}\right) w U}$$

11. $$\rho = \frac{\mu S (U + w/2) w U}{\mu S (U + w/2)^2 w}$$ $$\boxed{\rho = \frac{U}{U + w/2}}$$

Cette expression montre que $\rho \leq 1$.

On obtient $\rho = 1$ si $w = 0$. Mais dans ce cas, $F = 0$ et $P = 0$. Le bateau ne peut pas avancer et ce cas est sans intérêt !

12. $$P - P_u = \mu S w \left(U + \frac{w}{2}\right)^2 - \mu S \left(U + \frac{w}{2}\right) w U$$

$$= \mu S \left(U + \frac{w}{2}\right) \left(w \left(U + \frac{w}{2}\right) - U w \right)$$

$$= \underbrace{\mu S \left(U + \frac{w}{2}\right)}_{D_m} \left(\cancel{wU} + \frac{w^2}{2} \cancel{- Uw} \right)$$

$$P - P_u = D_m \frac{w^2}{2}$$

Pendant dt, la masse d'eau qui passe dans l'hélice est $D_m\, dt$. Sa vitesse dans R_T passe de 0 à w, donc l'augmentation de l'énergie cinétique de l'eau est

$$\frac{d\mathcal{E}_{c\,eau}}{dt} = \frac{1}{2} D_m w^2$$ (cela revient à faire un bilan dans R_T)

On a donc $$P = P_u + \frac{d\mathcal{E}_{c\,eau}}{dt}$$

L'énergie fournie par le moteur et qui n'est pas utile à la propulsion est dépensée pour mettre l'eau en mouvement à l'arrière du navire.

Application à la propulsion

1. Comme le bateau avance à vitesse constante, la somme des forces qu'il subit est nulle.

Il subit :

* $R_f \vec{u}_x$ sur sa coque ;
* $-\vec{F}$ sur son hélice d'après le principe des actions réciproques ;
* son poids et la poussée d'Archimède qui n'interviennent pas en projection sur $\vec{u}_x$.

$$R_f \vec{u}_x - F \vec{u}_x = 0 \qquad \underline{R_f = F}$$

2. En utilisant 9. avec $F = R_f$, on peut éliminer w.

$$\begin{cases} R_f = \mu S \left(U + \frac{w}{2}\right) w \\ \mathcal{P} = \mu S \left(U + \frac{w}{2}\right)^2 w \end{cases} \longrightarrow \frac{\mathcal{P}}{R_f} = U + \frac{w}{2}$$

et donc $w = 2\left(\frac{\mathcal{P}}{R_f} - U\right)$

En reportant dans l'expression de R_f :

$$R_f = \mu S \times \frac{\mathcal{P}}{R_f} \times 2\left(\frac{\mathcal{P}}{R_f} - U\right)$$

$$R_f^3 = 2\mu S \mathcal{P} (\mathcal{P} - U R_f)$$

$$R_f^3 = 2\mu S \mathcal{P}^2 - 2\mu S U \mathcal{P} R_f$$

donc $2\mu S \mathcal{P}^2 - 2\mu S U R_f \mathcal{P} - R_f^3 = 0$

3. On résout l'équation du 2^{nd} degré de la question 2 d'inconnue $\mathcal{P}$.

$$\Delta = 4S^2\mu^2R_f^2U^2 + 8R_f^3S\mu$$

La puissance cherchée est positive ce qui permet de choisir la racine

$$\mathcal{P} = \frac{2S\mu R_f U + \sqrt{4S^2\mu^2R_f^2U^2 + 8S\mu R_f^3}}{4S\mu}$$

$$\mathcal{P} = \frac{R_f U}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2R_f}{S\mu U^2}}\right)$$

Comme $R_f = \frac{1}{2}\mu\Sigma U^2 C$,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4}\mu C\Sigma U^3\left(1 + \sqrt{1 + \frac{C\Sigma}{S}}\right)$$

4. $$\rho = \frac{\mathcal{P}_u}{\mathcal{P}} = \frac{FU}{\mathcal{P}} = \frac{R_f U}{\mathcal{P}}$$

$$\rho = \frac{\frac{1}{2}C\mu\Sigma U^3}{\frac{1}{4}\mu C\Sigma U^3\left(1 + \sqrt{1 + \frac{C\Sigma}{S}}\right)}$$

$$\boxed{\rho = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{C\Sigma}{S}}}}$$

En général, $\rho \leq 1$.

On aurait $\rho = 1$ pour $C = 0$, c'est à dire pour un navire ne présentant aucune résistance à son avancement. Cela n'est pas réaliste !

5. $\underline{Re = 1,4.10^9}$ $\log Re = 9,2$

On lit sur la courbe $\underline{C = 0,00147}$

$R_f = \frac{1}{2} C \mu \Sigma U^2$ $\underline{R_f = 1,36.10^5 \text{ N}}$

Avec $S = \pi D^2/4 = 14,86 \text{m}^2$, $\underline{P = 1,39 \text{MW}}$

6. Il suffit de remplacer R_f par KR_f, ce qui revient à remplacer C par $C' = KC = 0,0036$.

$$P' = \frac{C'\mu\Sigma}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{C'\Sigma}{S}}\right)U^3$$

$\underline{P' = 3,6 \text{ MW}}$ $\underline{R_t = 3,3 .10^5 \text{ N}}$

$P_u = R_t U = 3,28 \text{ MW}$ $\underline{\rho = 90\,\%}$

On peut même calculer la vitesse de l'eau à l'arrière du navire dans R_T :

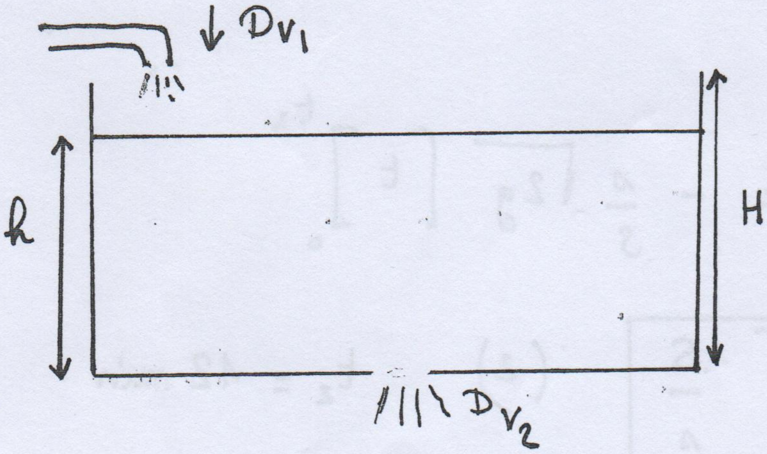
$w = 2\left(\frac{P'}{R_t} - U\right)$ d'après 2. $\underline{w = 2,1 \text{ m.s}^{-1}}$

Problème de la baignoire.

On suppose ses parois latérales verticales, c'est à dire sa section par un plan horizontal indépendante de la hauteur de ce plan.

Grandeurs utiles au raisonnement :

- débit volumique du robinet D_{V_1}. Il est fixé
- débit d'évacuation par la bonde D_{V_2}. Il est variable
- section S de la baignoire
- section s de la bonde
- hauteur H de la baignoire
- hauteur h de l'eau à un instant t.



- $1^{ère}$ phase : $D_{V_2} = 0$ D_{V_1} donné.

Pendant dt, la baignoire reçoit le volume d'eau

$dV = D_{V_1}\,dt$ donc $S\,dh = D_{V_1}\,dt$.

Par intégration $\boxed{D_{V_1} t_1 = S H}$ (1) avec $t_1 = 8$ min.

- 2^e phase : $D_{V_1} = 0$ $D_{V_2} > 0$.

On suppose réunies les conditions d'application de la formule de Torricelli (se reporter au cours pour les détails). Alors la vitesse de sortie est $v = \sqrt{2gh}$ et $D_{V_2} = s v = s\sqrt{2gh}$: il est d'autant plus élevé que h est plus grande.

Le bilan de volume d'eau s'écrit : $S\,dh = -D_{V_2}\,dt$

$$S\,dh = -s\sqrt{2gh}\;dt$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\;dt$$

En intégrant, on obtient une expression du temps de vidange t_2.

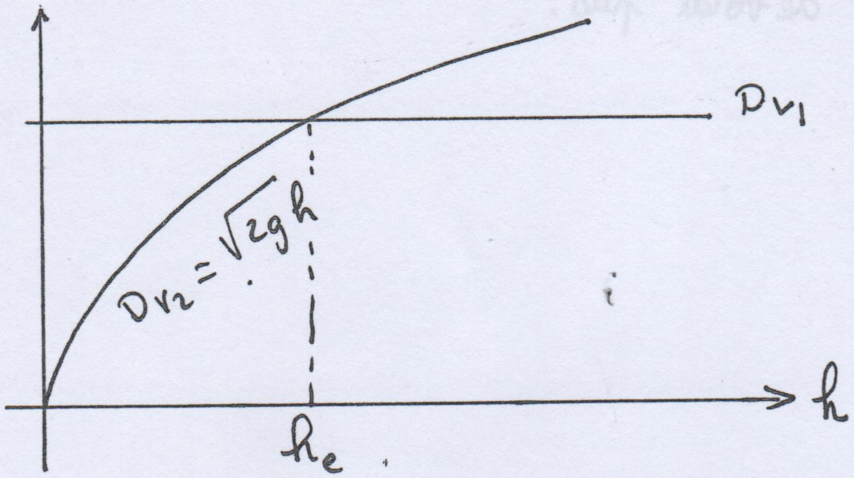
$$\left[2\sqrt{h}\right]_H^0 = -\frac{s}{S}\sqrt{2g}\,\left[t\right]_0^{t_2}$$

$$\boxed{t_2 = \sqrt{\frac{2H}{g}}\;\frac{S}{s}} \quad (2) \qquad t_2 = 12 \text{ min}$$

- 3^e phase : $D_{V_1} > 0$, $D_{V_2} > 0$ $D_{V_2} = s\sqrt{2gh}$

bilan de volume : $S\,dh = D_{V_1}\,dt - D_{V_2}\,dt$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{S}\left(D_{v1} - s\sqrt{2gh}\right)$$



h_e défini par $D_{v_1} = D_{v_2}$

ie $D_{v_1} = s\sqrt{2gh_e}$

si $\frac{dh}{dt} = 0$

– si $h < h_e$, $D_{v_1} > s\sqrt{2gh}$: le niveau monte.

– si $h > h_e$, $D_{v_1} < s\sqrt{2gh}$: le niveau descend.

Partant de $h=0$, le niveau va d'abord monter assez vite, puis de moins en moins vite à mesure que h augmente. Si h atteint h_e, il s'immobilise.

En conséquence, la baignoire déborde si $h_e > H$.

$$D_{v_1} = s\sqrt{2gh_e} \longrightarrow h_e = \frac{D_{v_1}^2}{2gs^2}$$

on élimine D_{v_1} avec (1) : $h_e = \dfrac{S^2H^2}{2gs^2t_1^2}$

on élimine $\dfrac{S^2}{s^2}$ avec (2) : $h_e = \dfrac{H^2}{2t_1^2} \times \dfrac{t_2^2}{2H}$ $\quad \boxed{h_e = \dfrac{t_2^2}{4t_1^2}H}$

4

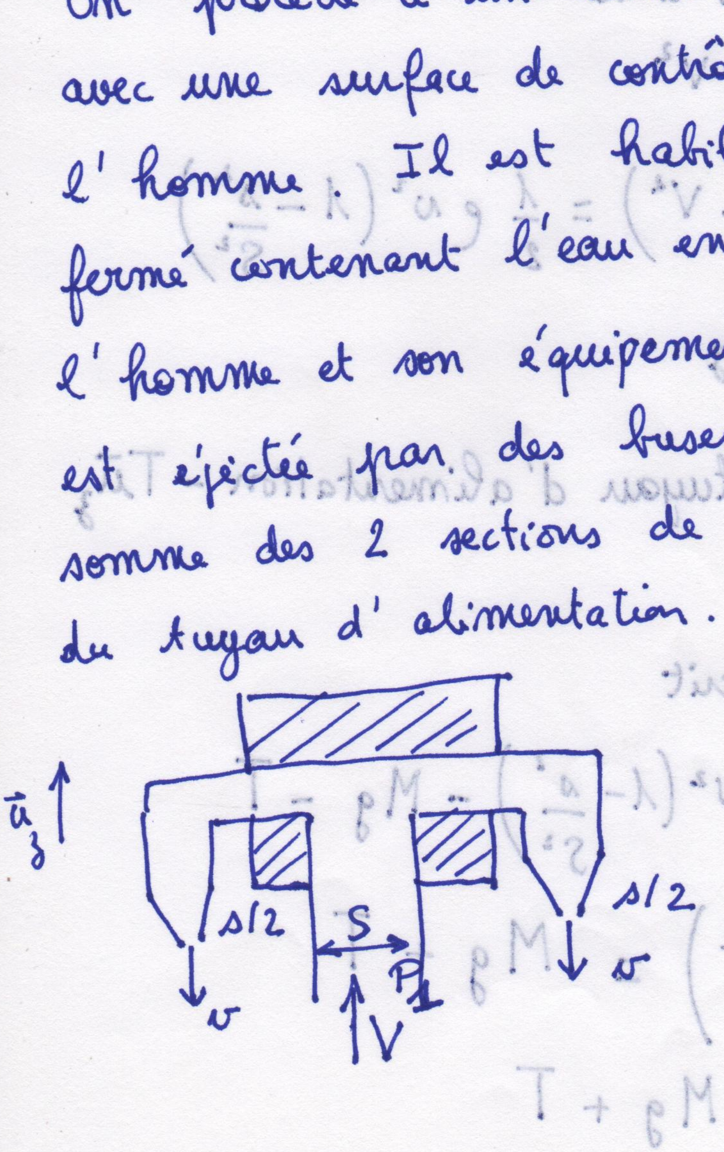
Avec les valeurs fournies, $h_e = \frac{9}{16} H < H$, donc la baignoire ne déborde pas.

Réacteur dorsal

① Qualitativement, on comprend que la force de poussée associée à l'éjection de l'eau vers le bas permet de maintenir l'homme en l'air. La mise en équation s'avère cependant délicate et je n'ai pas trouvé de solution satisfaisante. Je propose deux approches pour répondre à la première question ; elles ne conduisent malheureusement pas exactement à la même conclusion !

Première approche

On procède à un bilan de quantité de mouvement avec une surface de contrôle située dans la région de l'homme. Il est habile de considérer un système fermé contenant l'eau en écoulement, mais aussi l'homme et son équipement. On remarque que l'eau est éjectée par des buses coniques et on note s la somme des 2 sections de sortie, inférieure à celle S du tuyau d'alimentation.



conservation du débit :

$$\rho s v = \rho S V_e = D_m$$

2 Le bilan de quantité de mouvement usuel donne

$$\frac{dP_z}{dt} = D_m(-v - V) = -D_m v\left(1 + \frac{s}{S}\right) = -\rho s v^2\left(1 + \frac{s}{S}\right)$$

Le système considéré est soumis à :

- son poids $\vec{P} = -Mg\,\vec{u}_z$
- les forces de pression exercées par l'air et l'eau sur les 2 sections. Cette pression vaut P_0 atmosphérique partout, sauf sur la section S où elle vaut $P_1 = P_0 + \Delta P$.

$$\vec{F}_p = \underbrace{\oint p_0\, d\vec{S}}_{0} + \int_{\text{section } S} \Delta p\, d\vec{S} = \Delta P\, S\, \vec{u}_z$$

Pour trouver ΔP, appliquons la relation de Bernoulli entre les 2 sections supposées à la même hauteur.

$$p_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 = p_1 + \frac{1}{2}\rho V^2$$

$$\Delta p = p_1 - p_0 = \frac{1}{2}\rho(v^2 - V^2) = \frac{1}{2}\rho v^2\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right)$$

$$\vec{F}_p = \frac{1}{2}\rho S v^2\left(1 - s^2/S^2\right)\vec{u}_z$$

- la force de "tension" du tuyau d'alimentation $-T\vec{u}_z$

Elle est inconnue.

La 2^nde loi de Newton s'écrit

$$-D_m v\left(1 + \frac{s}{S}\right) = \frac{1}{2}\rho S v^2\left(1 - \frac{s^2}{S^2}\right) - Mg - T$$

$$\rho v^2\left(s + \frac{s^2}{S} + \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}\frac{s^2}{S}\right) = Mg + T$$

$$\rho v^2 s\left(1 + \frac{s}{2S} + \frac{S}{2s}\right) = Mg + T$$

$$v = \sqrt{\frac{Mg + T}{\rho s f\left(\frac{s}{S}\right)}} \qquad f(x) = 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)$$

Si on ne tient pas compte de la conicité de la buse d'éjection, $s = S$ et $f\left(\frac{s}{S}\right) = 2$

Le problème est qu'on ne connaît pas T !

Sur l'image, le tuyau flexible n'a pas l'air très tendu, et je suppose $T = 0$, peut-être valable si l'homme n'est pas trop haut.

Prenons $M = 100$ kg, $\frac{s}{2} = \pi r^2$ avec $r = 3$ cm

$= 28 \text{ cm}^2$

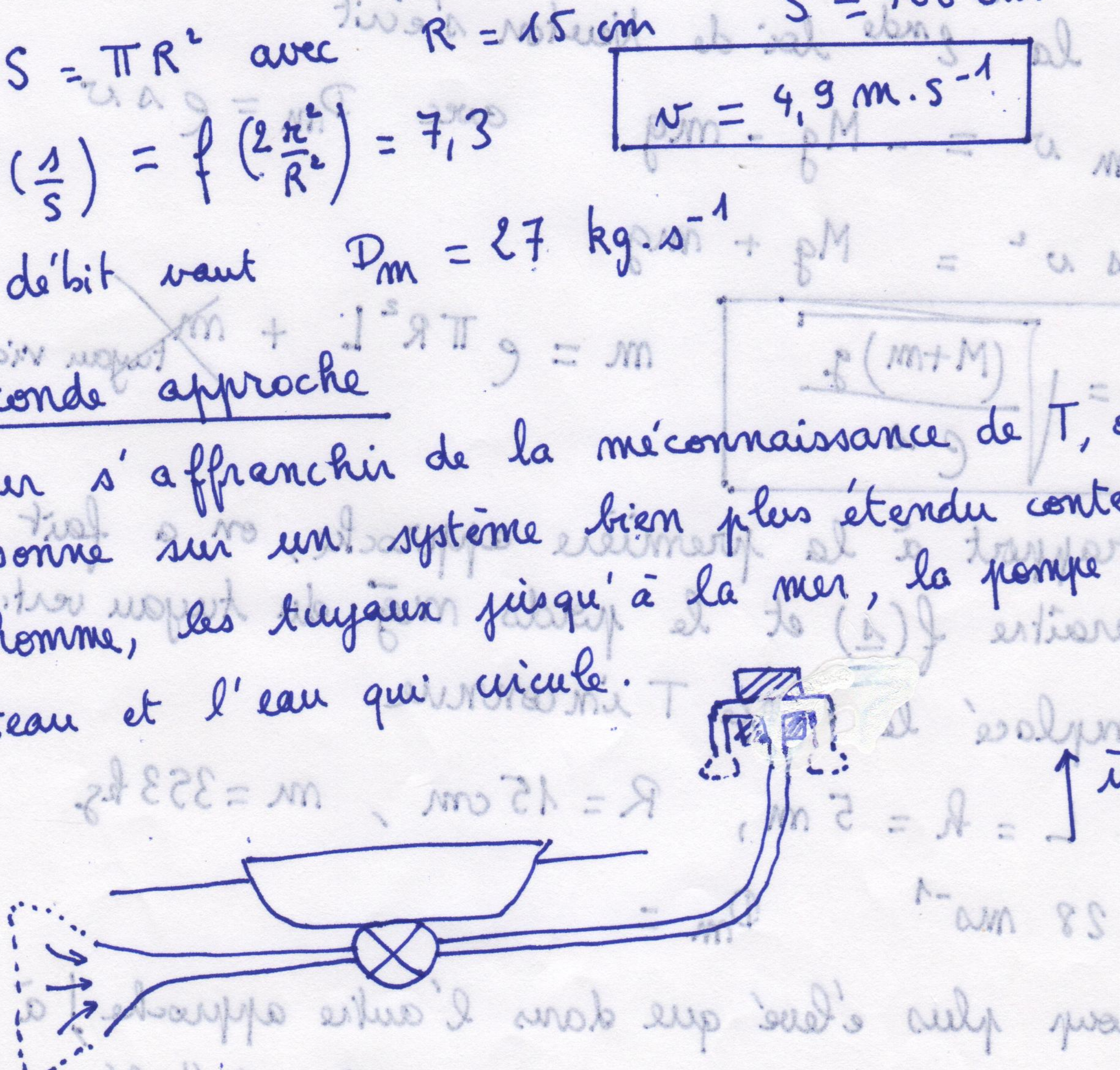
$S = \pi R^2$ avec $R = 15$ cm $\quad S = 706 \text{ cm}^2$

$$f\left(\frac{s}{S}\right) = f\left(2\frac{r^2}{R^2}\right) = 7{,}3 \qquad \boxed{v = 4{,}9 \text{ m.s}^{-1}}$$

Le débit vaut $D_m = 27 \text{ kg.s}^{-1}$

Seconde approche

Pour s'affranchir de la méconnaissance de T, on raisonne sur un système bien plus étendu contenant l'homme, les tuyaux jusqu'à la mer, la pompe, le bateau et l'eau qui circule.



Le bilan de quantité de mouvement usuel donne

$$\frac{dP_z}{dt} = -D_m v \quad \text{(0 pour l'eau d'entrée)}$$

Forces extérieures agissant sur ce système :

- poids $M\vec{g}$ de l'homme et de ce qui l'entoure
- poids $m\vec{g}$ du tuyau vertical et de l'eau qu'il contient
- poids $\vec{P}$ de la pompe, du bateau et du tuyau immergé
- forces de pression : partout p_0, sauf dans l'eau où p augmente avec la profondeur, donnant l'effet de poussée d'Archimède. $\vec{\Pi}_A$

On suppose que : $\vec{\Pi}_A + \vec{P} = \vec{0}$ (i)

Alors la 2nde loi de Newton s'écrit

$$-D_m v = -Mg - mg \qquad \text{avec } D_m = \rho s v$$

$$\rho s v^2 = Mg + mg$$

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{(M+m)g}{\rho s}}} \qquad m = \rho \pi R^2 L + \cancel{m}_{\text{tuyau vide}}$$

Par rapport à la première approche, on a fait disparaître $f\left(\frac{s}{S}\right)$ et le poids mg du tuyau vertical a remplacé la force T inconnue

Avec $L = h = 5\ m$, $R = 15\ cm$, $m = 353\ kg$

$v = 28\ ms^{-1}$ $\quad D_m =$

Beaucoup plus élevé que dans l'autre approche, à cause du terme mg (il faut aussi "porter" l'eau du tuyau.

Les deux approches sont critiquable.

- Dans la 1ère, il y a un doute sur T.
- Dans la 2nde, il y a un doute sur l'hypothèse (i).

L'eau est expulsée vers le haut par le tuyau immergé qui, en réaction, est poussé vers le bas. Je pense que le bateau s'enfonce davantage et que la poussée d'Archimède est plus forte que le poids.

② Pour obtenir la puissance fournie par la pompe, il suffit de faire un bilan sur le système déjà considéré dans la seconde approche de ①.

Nous avons fait cela en cours et on obtient

$$\mathcal{P} = D_m \left(hg + \frac{1}{2} v^2 \right)$$

Avec les valeurs numérique de la première approche

$\mathcal{P} = 16\ kW$