

PC* 26 - DEVOIR N° 13

corrigé

Forces capacitives

1. Calcul classique de cours. Par le théorème de Gauss on obtient

$$\vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{si } z > z_{plan} \quad \vec{E}_1 = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{si } z < z_{plan}$$

2. L'armature du haut porte σ , celle du bas $-\sigma$. Le champ entre les plaques s'obtient par superposition $\vec{E} = \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z$. Au niveau de l'armature haute, l'armature basse crée le champ $\vec{E}_2 = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$ ce qui est la moitié du champ total.

3. La force est due seulement au champ créé par l'armature basse $d\vec{F}_{capa} = \sigma dS \vec{E}_2 = -\frac{\sigma^2 dS}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$. Par intégration $\vec{F}_{capa} = -\frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{e}_z$. On relie la charge surfacique σ à la tension U :

$$U = \int_{\text{haut}}^{\text{bas}} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_l^0 \frac{-\sigma}{\epsilon_0} \vec{e}_z \cdot dz \vec{e}_z = \frac{\sigma l}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \sigma = \frac{lU}{\epsilon_0}.$$

On obtient donc

$$F_{capa} = -\frac{\epsilon_0 S U^2}{2l}.$$

On remarque que F_{capa} est négative, donc dirigée vers le bas. Cela signifie que la force entre les plaques est attractive quel que soit le signe de U .

4.

$$F_{capa}(l + \delta) = -\frac{\epsilon_0 U^2 S}{2(l + \delta)^2} = -\frac{\epsilon_0 U^2 S}{2l^2(1 + \delta/l)^2} \simeq -\frac{\epsilon_0 U^2 S}{2l^2} \left(1 - \frac{2\delta}{l}\right)$$

$$\Delta F_{capa} = F_{capa}(l + \delta) - F_{capa}(l) = \frac{\epsilon_0 U^2 S \delta}{l^3}$$

Cette variation est proportionnel au déplacement δ comme pour un ressort s'allongeant de δ et dont la raideur serait $k = \frac{\epsilon_0 U^2 S}{l^3}$. On remarque cependant que dans le cas d'un ressort, un déplacement δ positif donnerait une force négative.

1 a) Équation de Poisson

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h & \quad \frac{d^2 V}{dz^2} + \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0 \\ h \leq z \leq l & \quad \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \end{aligned}$$

b) On intègre deux fois

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h & \quad V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + Az + B \\ h \leq z \leq l & \quad V = Cz + D \end{aligned}$$

On trouve les 4 constantes grâce à

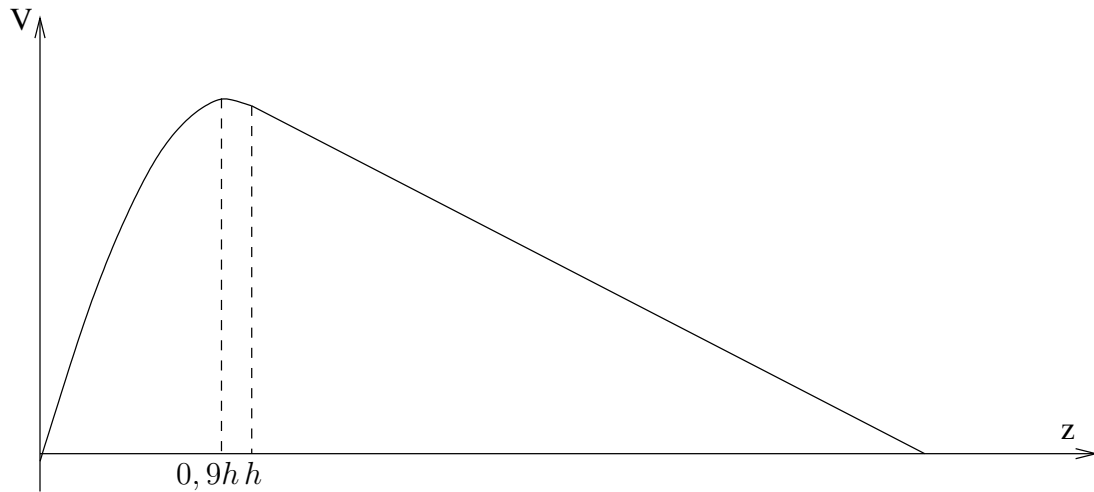
$$V(0) = 0 \quad V(l) = 0 \quad V(h^-) = V(h^+) \quad E(h^-) = E(h^+)$$

ce qui donne après calcul

$$\begin{aligned} 0 \leq z \leq h & \quad V = -\frac{\rho z^2}{2\epsilon_0} + \frac{\rho h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{2l}\right) z & \quad E = \frac{\rho z}{\epsilon_0} - \frac{\rho h}{\epsilon_0} \left(1 - \frac{h}{2l}\right) \\ h \leq z \leq l & \quad V = -\frac{\rho h^2}{2l\epsilon_0} (z - l) & \quad E = \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} \end{aligned}$$

Le champ est uniforme pour $h \leq z \leq l$. En particulier $E(l) = \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l}$

- c) Dans la région $0 \leq z \leq h$, E s'annule pour $z = h \left(1 - \frac{h}{2l}\right)$ soit $z = 0,9h$. En ce point V présente un extrémum qui est un maximum car $\frac{d^2V}{dz^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} < 0$. On calcule $V(h) = 0,8 \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0}$ et $V(0,9h) = 0,405 \frac{\rho h^2}{\epsilon_0}$. Il est important que bien faire apparaître sur la courbe la continuité de V et celle de sa dérivée : les deux parties du graphiques se raccordent en $z = h$ sans point anguleux.



2 a) Le principe de superposition permet d'affirmer que le potentiel s'obtient en sommant deux termes : d'une part celui obtenu lorsque $U = 0$ dans la question précédente, et d'autre part celui associé à $U \neq 0$. Cette réponse suffit au concours, mais elle mérite peut-être d'être précisée. Habituellement, le principe de superposition signifie que si on peut décomposer les sources du champ en une somme de diverses contributions, le champ s'obtient en sommant les champs créés par chacune d'elles. Ici, il s'agit d'un principe de superposition portant à la fois sur les charges et sur les conditions de bord et son utilisation directe peut sembler un peu abusive. Voici une justification plus détaillée. Soit $V_1(z)$ le potentiel obtenu dans la question précédente avec $U = 0$ et la présence des charges volumiques. Il vérifie

$$\forall M, \Delta V_1 + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad V_1(0) = 0 \quad V_1(l) = 0$$

et est de classe C^1 . Soit $V_2(z)$ le potentiel dans le condensateur vide de charge sous la tension U , comme dans la première partie. Il vérifie

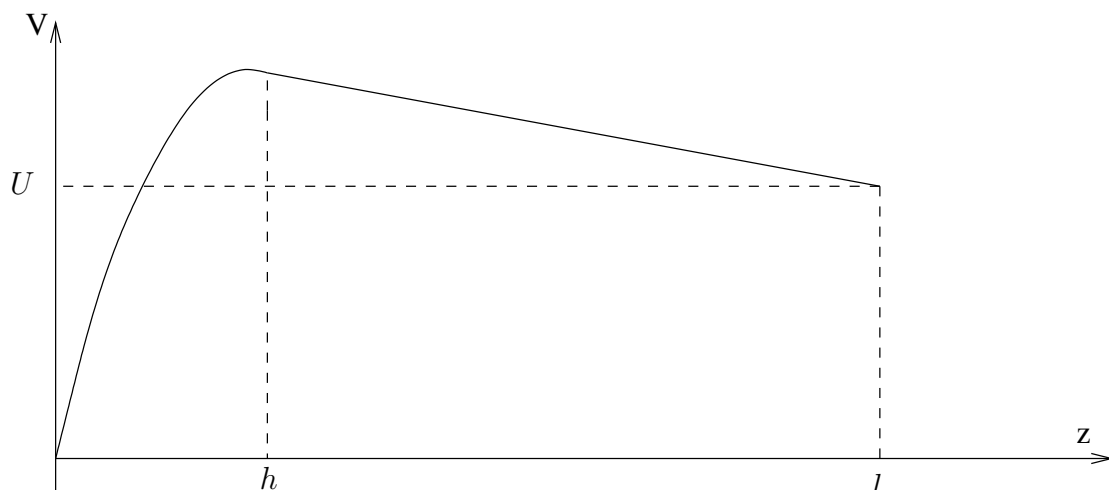
$$\forall M, \Delta V_2(M) = 0 \quad V_2(0) = 0 \quad V_2(l) = U$$

et est de classe C^1 . Considérons la fonction $V(z) = V_1(z) + V_2(z)$. En utilisant notamment la linéarité du laplacien et en utilisant les propriétés de V_1 et V_2 , elle vérifie

$$\forall M, \Delta V + \frac{\rho(M)}{\epsilon_0} = 0 \quad V(0) = 0 \quad V(l) = U$$

et est de classe C^1 . Elle est donc la solution du problème du condensateur comportant la densité volumique de charge et entre les plaques duquel on applique la tension U .

- b) En ajoutant $V_2(z)$ au tracé précédent on obtient le tracé suivant dont l'allure précise dépend des valeurs relatives de U et $\rho h^2/\epsilon_0$.



3 a) On ajoute champ de la question 1b et le champ $-U/l\vec{e}_z$ associé au condensateur plan seul. On obtient

$$\vec{E}(l) = \left(\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} - \frac{U}{l} \right) \vec{e}_z \quad .$$

Pour trouver la charge surfacique portée par la plaque supérieure, on applique un peu comme dans la question 1 le théorème de Gauss à un cylindre dont la face supérieure se trouve au dessus de la plaque où le champ est nul et dont la face inférieure se trouve sous la plaque où le champ vaut $\vec{E}(l)$. Comme la face inférieure a sa normale orientée vers le bas, le flux est donné par

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = -E(l)S \quad .$$

D'après le théorème de Gauss on a donc

$$-E(l)S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0} \quad \text{donc} \quad \sigma = \epsilon_0 \left(\frac{U}{l} - \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} \right) \quad .$$

b) De même qu'en I.3,

$$\vec{E}(l) = \underbrace{\vec{E}_{\text{créé par } \sigma}}_{-\frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_z} + \vec{E}_{\text{créé par le reste}}$$

Le champ qui agit sur σ est

$$\vec{E}_{\text{créé par le reste}} = \vec{E}(l) + \frac{\sigma}{\epsilon_0}\vec{e}_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} - \frac{U}{l} \right) \vec{e}_z = \frac{1}{2} \vec{E}(l)$$

La force sur l'armature est

$$\vec{F} = \sigma S \vec{E}_{\text{créé par le reste}} = -\frac{S}{2} \left(\frac{U}{l} - \frac{\rho h^2}{2\epsilon_0 l} \right)^2 \vec{e}_z$$

Électrofiltre

I Champ électrique dans un électrofiltre

I.1 Champ électrique à vide et tension seuil

I.A.1) Dans une région vide de charge, l'équation de Poisson devient l'équation de Laplace $\Delta V = 0$.

I.A.2) a) En coordonnées cylindriques, V ne dépend que de r . En tenant compte des conditions de bord $V(r_c) = 0$ et $V(r_e) = -U$, l'équation de Laplace se résout en

$$V = U \frac{\ln(r/r_c)}{\ln(r_e/r_c)} \quad .$$

b)

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dr} \vec{u}_r \vec{E}(r_e) = -\frac{U}{r_e \ln(r_e/r_c)} \vec{u}_r \quad U_0 = E_0 r_e \ln(r_e/r_c)$$

c) $U_0 = 26,3 \text{ kV}$

I.A.3) a) Les collectrices sont définies par $y = \pm s$ de sorte que $\cos(\pi y/(2s)) = \cos(\pm\pi/2) = 0$. L'expression de V donnée dans l'énoncé donne alors $V = 0$ ce qui est en accord avec le fait que les collectrices sont portées à la terre.

Au contraire les émettrices sont portées au potentiel $-U$. En écrivant que $V(0, r_e, z) = -U$, on trouve

$$\Lambda = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \ln \left[\frac{\cosh\left(\frac{\pi m c}{s}\right) + \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)}{\cosh\left(\frac{\pi m c}{s}\right) - \cos\left(\frac{\pi r_e}{2s}\right)} \right] \quad .$$

b) Lignes de champ perpendiculaires aux équipotentielles dirigées des plaques vers les fils. Zones de fort champ près des fils. Champ nul dans le plan médiateur des deux plaques à égale distance de deux fils successifs (points C et D du document déposé).

c) On lit sur la courbe que près de l'émettrice, $|E_y| \simeq 23,5U/s$. On obtient $|E_y| = E_0$ si $U = U_0 \simeq \frac{s}{23,5} E_0 = 28,1 \text{ kV}$. L'ordre de grandeur est le même que pour l'électrofiltre tubulaire.

I.2 Influence des charges d'espaces

I.B.1) $i > 0$ dirigé de la périphérie vers l'axe du cylindre. $j = -i/(2\pi rh) < 0$

I.B.2) Comme $j = \rho v = -\rho bE$,

$$\rho = \frac{i}{2\pi r h b E}$$

I.B.3) On utilise l'équation de Maxwell-Gauss en coordonnées cylindriques.

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (rE) = \frac{i}{2\pi r h b E \epsilon_0}$$

qui donne l'équation demandée après multiplication membre à membre par $r^2 E$.

I.B.4) On intègre l'équation de la question précédente après l'avoir multipliée membre à membre par r .

$$\frac{1}{2} (rE(r))^2 - \frac{1}{2} (r_0 E_0)^2 = \frac{i}{2\pi h b \epsilon_0} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r_0^2}{2} \right)$$

En n'oubliant pas que E est ici négatif,

$$E = -\sqrt{\frac{E_0^2 r_0^2}{r^2} + \frac{i}{2\pi b h \epsilon_0} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)}$$

I.B.5) Pour $r \gg r_0$,

$$E \simeq -\sqrt{\frac{i}{2\pi b h \epsilon_0}} = -2,0 \cdot 10^5 \text{ V.m}^{-1}$$

I.B.6)

$$v = -bE = 62 \text{ m.s}^{-1} \quad \rho = -\frac{i}{2\pi h r_{\text{cv}}} = -1,2 \cdot 10^{-5} \text{ C.m}^{-3} \quad n_{\text{ions}} = |\rho|/e = 7,5 \cdot 10^7 \text{ cm}^{-3}$$

II Comportement des poussières dans l'électrofiltre

II.1 Charge d'une particule sphérique : modèle de Pauthenier

I.B.1) a) Voir le document réponse. Les flèches bleues sont dirigées vers la gauche et les flèches rouges vers la droite. Pas de flèche rouge sur les lignes de champ qui vont à la rencontre de la sphère.

b) À cause de l'invariance par rotation et du théorème de Gauss, une particule sphérique seule dans l'espace créerait le même champ qu'une charge ponctuelle placée en son centre. Donc $\vec{E}_1 = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$ avec $Q < 0$, ce qui ajoute au champ une composante centripète et accroît la partie de la sphère sur laquelle les lignes de champ entrent. La portion de la sphère d'où les lignes de champ partent se réduit. Comme c'est cette partie la sphère qui peut capter des ions, l'augmentation de $|Q|$ défavorise l'arrivée de nouveaux anions. On peut dire tout simplement qu'une charge négative sur la sphère dissuade d'autres charges négatives de s'en approcher.

c) On calcule $\vec{E}_t \cdot \vec{u}_r$ à la surface de la sphère, i.e. pour $r = a$

$$\vec{E}_t(R, \theta) \cdot \vec{u}_r = E \cos \theta + E \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} \times 2 \cos \theta + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2}$$

Le processus de chargement cesse lorsque toutes les lignes de champ qui rencontrent la sphère sont dirigées vers son centre. La charge limite est obtenue lorsque cette projection radiale est négative pour tout θ , c'est à dire $E(\pi) \leq 0$. On en tire la valeur de Q_{lim} proposée.

d)

$$1 + 2 \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = 2,5 \quad Q_{\text{lim}} = -1,4 \cdot 10^{-16} \text{ C} \quad \frac{|Q_{\text{lim}}|}{e} = 8,7 \cdot 10^2$$

I.B.2) a) La permittivité ϵ_0 s'exprime en F.m^{-1} c'est à dire en $\text{C.V}^{-1}.\text{m}^{-1}$, ρ en C.m^{-3} et b en $\text{m}^2.\text{V}^{-1}.\text{s}^{-1}$. Pour être homogène à un temps, τ_Q est donc proportionnel à $1/b$ puis on trouve facilement

$$\tau_Q = \frac{4\epsilon_0}{|\rho|b} \quad .$$

On peut retrouver ce résultat en utilisant les dimension fondamentales

$$[\epsilon_0] = M^{-1}L^{-3}I^2T^4 \quad [b] = M^{-1}T^2I \quad [\rho] = ITL^{-3} \quad .$$

Pour trouver la dimension de ϵ_0 , on peut partir de la force entre deux particules chargées, ou encore se rappeler que $\epsilon_0 = [C]/L = [Q]/([U]L)$ avec $[Q] = IT$ et $[U] = [E_p]/[Q]$.

b) $\tau_{90} = 9\tau_Q = 21 \text{ ms}$

c) Le temps que met un grain de poussière à traverser tout l'électrofiltre est $L/u_0 = 10 \text{ s} \gg \tau_Q$. Un grain se charge donc presque dès son entrée.

d) L'angle θ_c correspond à l'annulation de $E_{tr} = \vec{E}_t \cdot \vec{u}_r$ (exprimé plus haut). En résolvant $E_{tr} = 0$, on trouve

$$\cos \theta_c = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2 \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2}} \quad \boxed{\cos \theta_c = -\frac{Q}{Q_{\text{lim}}}} \quad .$$

Les charges Q et Q_{lim} sont négatives donc $\cos \theta < 0$ et $\theta \in]\pi/2, \pi]$.

e) La densité de courant est $\vec{j} = \rho\vec{v} = -\rho b\vec{E}_t$. À la surface de la particule, $\vec{E}_t = E_{tr}\vec{u}_r + E_{t\theta}\vec{u}_\theta$ et

$$\vec{j}_r = -\rho b \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a^2} + \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} E \cos \theta \right) \vec{u}_r$$

$$\boxed{\vec{j}_r = -\frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} \rho b E (\cos \theta - \cos \theta_c) \vec{u}_r = -\frac{Q_{\text{lim}} \rho b}{4\pi\epsilon_0 a^2} (\cos \theta - \cos \theta_c) \vec{u}_r}$$

La composante j_θ n'est pas utile pour la suite. Pour $\theta > \theta_c$, $\cos \theta - \cos \theta_c < 0$. De plus, $E < 0$ et $\rho < 0$, $\vec{j} \cdot \vec{u}_r > 0$ ou $\vec{j} \cdot \vec{u}_r < 0$: cela décrit bien un flux entrant de charges négatives dans la zone $\theta > \theta_c$.

f) Les anions rejoignent la sphère dans la région $\theta \in [\theta_c, \pi]$ et l'intensité reçue par le grain de poussière est

$$i = - \int \vec{j} \cdot dS \vec{u}_r = \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} \rho b E \int_{\theta_c}^{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos \theta - \cos \theta_c) a^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

$$= \frac{3\epsilon_r}{\epsilon_r+2} \rho b E a^2 \times 2\pi \times \frac{-1}{2} (1 + \cos \theta_c)^2 \quad \boxed{i = -\rho b \frac{Q_{\text{lim}}}{4\epsilon_0} \left(1 - \frac{Q}{Q_{\text{lim}}}\right)^2} \quad .$$

g) Pendant dt , la particule reçoit la charge idt donc Q varie de idt :

$$dQ = idt \quad \frac{dQ}{dt} = i = -\rho b \frac{Q_{\text{lim}}}{4\epsilon_0} \left(1 - \frac{Q}{Q_{\text{lim}}}\right)^2$$

$$\frac{dQ}{1 - \frac{Q}{Q_{\text{lim}}}} = -\frac{\rho b}{4\epsilon_0} dt \quad \int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{1 - \frac{Q}{Q_{\text{lim}}}} = \frac{1}{\tau} \int_0^t dt \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4\epsilon_0}{-\rho b}$$

$$\left[Q_{\text{lim}} \frac{1}{1 - Q/Q_{\text{lim}}} \right]_0^Q (t) = \frac{t}{\tau}$$

$$Q_{\text{lim}} \left(\frac{1}{1 - Q/Q_{\text{lim}}} - 1 \right) = \frac{t}{\tau}$$

d'où on tire facilement

$$Q(t) = Q_{\text{lim}} \frac{1}{1 + t/\tau} \quad .$$

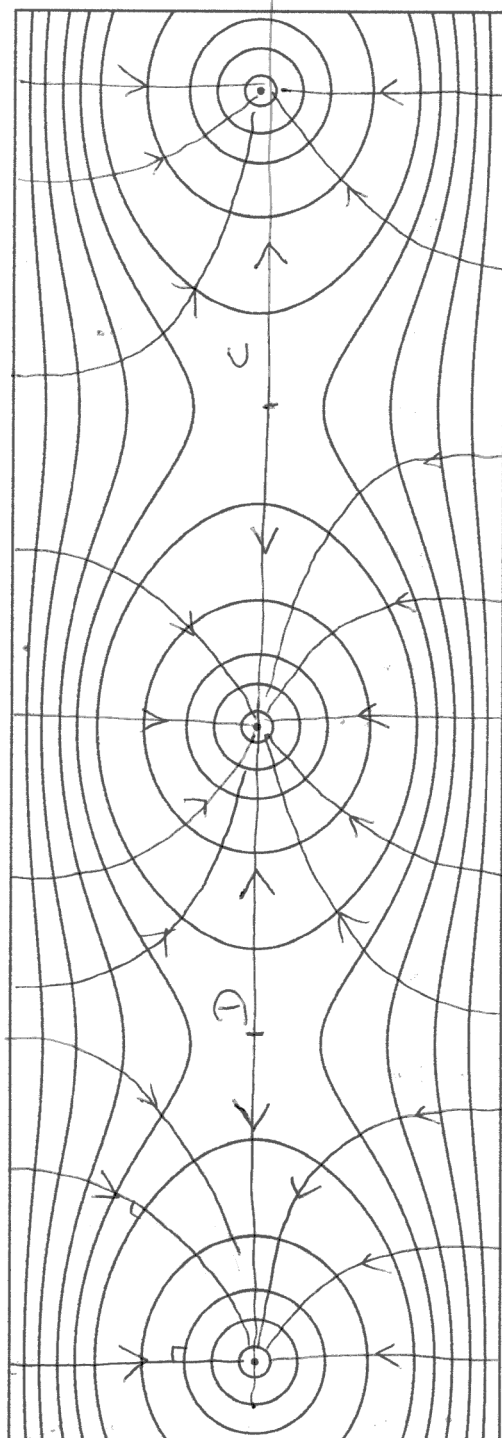
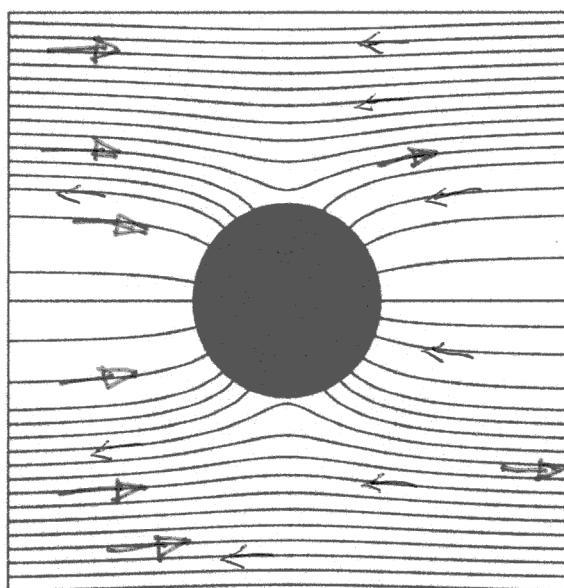


FIGURE 1 – Carte des équipotentielleles dans un électrofiltre sec

FIGURE 2 – Lignes de champ autour d'un grain de poussière pour $Q = 0$ (en haut) et pour $Q < 0$ (en bas)

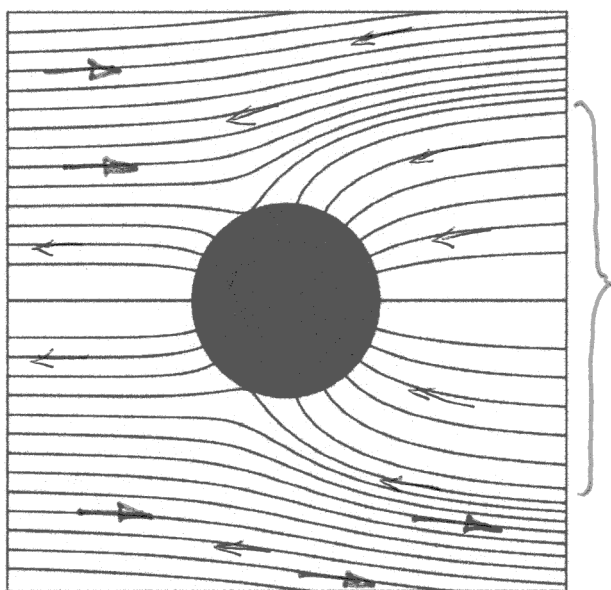
2



$\vec{E} \rightarrow$ bleu

Mvt anions

$\rightarrow$ rouge



pas d'anions sur les ldc signalés
par les accolades