

PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 5 — piste bleue

samedi 17 janvier 2026
durée : 3 heures

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — Fubini ou pas ?

On considère la famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ définie par

$$c_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i > j, \\ j & \text{si } i = j, \\ -2i3^{i-j} & \text{si } i < j. \end{cases}$$

Question 1. La famille $(c_{i,j})_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est-elle sommable ?

Question 2. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, justifier la convergence de la série $\sum_{j \geq 0} c_{i,j}$ et calculer sa somme.

Question 3. En déduire que la somme double $\sum_{i=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} c_{i,j}$ existe et préciser sa valeur.

Question 4. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, justifier que la série $\sum_{i \geq 0} c_{i,j}$ converge. Sa somme est notée S_j .

Question 5. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, justifier la relation $S_{j+1} = 1 + \frac{1}{3}S_j$.

Question 6. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, démontrer la relation $S_j = \frac{1}{2} \frac{3^j - 1}{3^{j-1}}$.

Question 7. En déduire la nature de la série $\sum_{j \geq 0} \sum_{i=0}^{+\infty} c_{i,j}$.

Problème 2 — la fonction dilogarithme

Dans ce problème, on admet l'égalité $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

On définit une fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$ par $f(t, x) = \frac{t}{e^t - x}$.

Lorsque c'est possible, on pose $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t, x) dt$ puis $L(x) = xF(x)$.

Première partie

Question 8. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

Question 9. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

Question 10. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que la fonction $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

On a alors justifié que les fonctions F et L sont bien définies sur l'intervalle $] -\infty, 1]$.

Question 11. Montrer que la fonction F est continue sur $] -\infty, 1]$.

Question 12. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $] -\infty, 1[$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale, que l'on ne cherchera pas à calculer.

Deuxième partie

Dans cette partie, on fixe un élément x du segment $[-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction

$$s_n : t \mapsto te^{-(n+1)t} x^n.$$

Question 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} s_n(t) dt$ converge et qu'elle vaut $\frac{x^n}{(n+1)^2}$.

Question 14. Justifier que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} s_n$ converge simplement sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et préciser sa somme.

Question 15. À l'aide d'un théorème d'intégration terme à terme, justifier l'égalité $L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

Cette égalité a donc été obtenue pour tout $x \in [-1, 1]$.

Question 16. Justifier l'égalité $L(x) + L(-x) = \frac{1}{2}L(x^2)$.

Question 17. En déduire la valeur de $L(-1)$.

Troisième partie

On définit une fonction $h :]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x) \ln(1-x).$$

Question 18. Pour tout $x \in]-1, 1[$, justifier que la série $\sum_{n \geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge absolument.

On a vu en classe que sa somme est la fonction $x \mapsto -\ln(1-x)$. On ne demande pas ici de le redémontrer.

Question 19. Justifier que la fonction L est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1[$ et exprimer sa dérivée.

Question 20. Justifier que la fonction h est constante sur $]0, 1[$.

Question 21. Pour tout $x \in]0, 1[$, justifier l'égalité $h(x) = L(1)$.

Question 22. Calculer l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{t}{2e^t - 1} dt$.

Problème 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $f_n : x \mapsto \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$ sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$.

Question 23. Pour tout $x \geq 0$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la majoration $f_n(x) \leq e^{-x}$.

Question 24. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, justifier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x) dx$.

La valeur de cette intégrale est notée A_n .

Question 25. À l'aide du théorème de convergence dominée, justifier que la suite $(A_n)_{n \geq 1}$ est convergente et déterminer sa limite.