

PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 5 — piste rouge

samedi 17 janvier 2026
durée : 3 heures

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — Séries trigonométriques

On note E l'espace vectoriel réel des fonctions continues et 2π -périodiques définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On le munit du produit scalaire défini par

$$(f|g) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t) \, dt.$$

La norme associée à ce produit scalaire est notée $\| \cdot \|$.

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$c_n : x \mapsto \cos(nx) \quad \text{et} \quad s_n : x \mapsto \sin(nx).$$

On remarque que les fonctions c_n et s_n sont des éléments de E . On remarque aussi que s_0 est la fonction nulle, si bien qu'on ne la prendra pas en compte dans ce qui suit.

On appelle *série trigonométrique réelle* toute série de fonctions de la forme $\sum_{n \geq 0} (a_n c_n + b_n s_n)$, les a_n et les b_n étant des constantes réelles.

On note $\mathcal{C}$ la famille $(c_n)_{n \geq 0}$ et $\mathcal{S}$ la famille $(s_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathcal{F}_n$ la famille $(c_0, \dots, c_n, s_1, \dots, s_n)$ et $\mathcal{T}_n$ le sous-espace vectoriel de E engendré par cette famille. Les éléments de $\mathcal{F}_n$ sont les *polynômes trigonométriques de degré inférieur ou égal à n* .

Étant donné une fonction f élément de E , pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) \, dt \quad \text{et} \quad b_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(nt) \, dt.$$

Partie 1 — Produit scalaire

Question 1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la famille $\mathcal{F}_n$ est orthogonale et en déduire la dimension de $\mathcal{T}_n$.

Question 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $f \in E$. On note $S_n(f)$ le projeté orthogonal du vecteur f sur le sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_n$.

Prouver l'égalité

$$S_n(f) = \frac{a_0(f)}{2} c_0 + \sum_{k=1}^n (a_k(f) c_k + b_k(f) s_k).$$

Question 3. Soit $f \in E$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'inégalité $\|S_n(f)\|^2 \leq \|f\|^2$.

Question 4. Soit $f \in E$. Prouver que la série de terme général $a_n(f)^2 + b_n(f)^2$ est convergente.

Question 5. Soit $f \in E$. On admet un théorème dû à Karl Weierstraß, selon lequel il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 1}$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction f , telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction f_n soit un élément de $\mathcal{T}_n$.

5.a. Prouver les inégalités $\|f - S_n(f)\| \leq \|f - f_n\| \leq \|f - f_n\|_\infty$.

5.b. En déduire que la suite $(S_n(f))_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers f pour la norme $\|\cdot\|$.

Question 6. Démontrer la *formule de Parseval* : pour toute fonction f de E , on a l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2 dt = \frac{a_0(f)^2}{4} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n(f)^2 + b_n(f)^2}{2}.$$

Question 7. Soient f et g deux éléments de E . On fait l'hypothèse suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n(f) = a_n(g), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(f) = b_n(g).$$

Montrer alors que les fonctions f et g sont égales.

Partie 2 — Convergence normale

Question 8. Étant donné deux suites réelles $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, montrer que la série $\sum_{n \geq 0} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ converge si, et seulement si, les deux séries $\sum_{n \geq 0} \alpha_n$ et $\sum_{n \geq 0} \beta_n$ convergent absolument.

Dans la suite, on se donne deux suites réelles $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$u_n : x \mapsto \alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx).$$

Question 9. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $\|u_n\|_{\infty, \mathbb{R}} = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$.

Question 10. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si, les séries $\sum_{n \geq 1} \alpha_n$ et $\sum_{n \geq 1} \beta_n$ convergent absolument.

Question 11. Dans cette question, on suppose que les conditions de la question précédente sont remplies. On peut donc définir sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$g : x \mapsto \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (\alpha_n \cos(nx) + \beta_n \sin(nx)).$$

Montrer alors que g est un élément de E et prouver les égalités

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \alpha_n = a_n(g), \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \beta_n = b_n(g).$$

Question 12. On considère une fonction f appartenant à E . On suppose que $\sum_{n \geq 1} |a_n(f)|$ et $\sum_{n \geq 1} |b_n(f)|$ convergent.

À l'aide du résultat de la question 8, prouver alors l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n(f) \cos(nx) + b_n(f) \sin(nx)).$$

On dit qu'une telle fonction est *égale à la somme de sa série de Fourier*.

Question 13. Dans cette question, on considère une fonction f appartenant à E et on suppose qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

13.a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer les nombres $a_n(f)$ et $b_n(f)$ en fonction de $a_n(f')$ et $b_n(f')$.

13.b. En déduire les inégalités $|a_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(b_n(f')^2 + \frac{1}{n^2} \right)$ et $|b_n(f)| \leq \frac{1}{2} \left(a_n(f')^2 + \frac{1}{n^2} \right)$.

13.c. En déduire que la fonction f est égale à la somme de sa série de Fourier.

Partie 3 — Un exemple

On construit une fonction f en posant $f(x) = x(\pi - x)$ si x est dans $[0, \pi]$, puis $f(x) = -f(-x)$ si x est dans $[-\pi, 0]$, puis en imposant à f d'être 2π -périodique.

Question 14. Expliquer rapidement pourquoi une telle construction est possible.

Question 15. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Question 16. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, prouver que $a_n(f)$ est nul.

Question 17. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer l'égalité $b_n(f) = \frac{4(1 - (-1)^n)}{\pi} \times \frac{1}{n^3}$.

Question 18. En déduire l'identité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3}.$$

Question 19. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$.

Question 20. En appliquant la formule de Parseval (question 6), obtenir la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$ et en déduire celle de $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^6}$.

Problème 2 — Une transformée de Fourier

Question 21. Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $2b \geq a + 2$, montrer que la fonction

$$G_{a,b} : x \mapsto \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t^a}{(1+t^2)^b} e^{ixt} dt$$

est définie et continue sur $\mathbb{R}$.

On pose alors $F = G_{0,1}$ et $H = G_{0,2}$.

Question 22. Montrer que la fonction F est paire.

Question 23. Montrer que la fonction H est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.

Question 24. Trouver une relation entre les fonctions F, H, H'' .

Question 25. Pour tout x réel, montrer l'égalité $xF(x) = -2H'(x)$.

Question 26. En déduire que la fonction F a une limite nulle en $+\infty$.

Question 27. Montrer que la fonction F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Question 28. Exprimer F' et en déduire que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$.

Question 29. Pour tout $x > 0$, montrer que $F''(x) = F(x)$.

Question 30. Obtenir une expression explicite de la fonction F sur $]0, +\infty[$ puis sur $\mathbb{R}$.