

PC* 26 - DEVOIR N° 14

corrigé

Conduction électrique dans un semi-conducteur

Mines-Ponts

□ 1. En régime permanent, l'intensité i émise par le film traverse aussi un cylindre quelconque d'axe (Az) , de rayon r et de hauteur ϵ :

$$i = \int \vec{j} \cdot d\vec{S} = j(r) \times 2\pi r \epsilon \quad \boxed{j(r) = \frac{i}{2\pi r \epsilon}} \quad .$$

□ 2. La loi d'Ohm donne

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{i}{2\pi r \gamma \epsilon} \vec{e}_r \quad .$$

Comme $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$, $E = -dV/dr$ et par intégration on obtient

$$V(r) = -\frac{i}{2\pi \gamma \epsilon} \ln r + Cste \quad .$$

Il en découle

$$\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \epsilon} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad .$$

□ 3. Si le fil de droite était seul, on obtiendrait le même résultat en remplaçant i par $-i$, r_1 par r'_1 et r_2 par r'_2 . En additionnant la situation où seul le fil gauche est présent avec celle où seul le fil droit l'est, on obtient

$$\boxed{V(M_1) - V(M_2) = \frac{i}{2\pi \gamma \epsilon} \left(\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right) - \ln \left(\frac{r'_2}{r'_1} \right) \right)} \quad .$$

Sur la médiatrice de AD , $r_1 = r'_1$ et $r_2 = r'_2$ donc $V(M_1) - V(M_2) = 0$. Cela signifie que cette médiatrice est une équipotentielle et donc que le champ électrique et les lignes de champ lui sont perpendiculaires. Cela est conforme à l'intuition : les lignes de courant cheminant de A vers D croisent orthogonalement cette médiatrice.

□ 4. Pour exprimer la ddp entre les points A et D , utilisons l'expression de la question 3 avec M_1 un point à la surface de l'électrode A et M_2 un point à la surface de l'électrode D . Si $\ell \gg a$, la surface de chaque électrode est presque à la distance ℓ de l'axe de l'autre électrode, donc

$$r_1 = a \quad , r'_2 = a \quad , r_2 \approx \ell \quad , r'_1 \approx \ell \quad .$$

Ainsi,

$$V(A) - V(D) = \frac{i}{2\pi \gamma \epsilon} \left(\ln \frac{\ell}{a} - \ln \frac{a}{\ell} \right) = \frac{i}{\pi \epsilon \gamma} \ln \frac{\ell}{a} \quad .$$

Par définition, $V(A) - V(D) = Ri$ et on identifie

$$R = R_0 \ln \left(\frac{\ell}{a} \right) \quad \text{avec} \quad \boxed{R_0 = \frac{1}{\pi \epsilon \gamma}} \quad .$$

□ 5. $R = 53,3 \text{ m}\Omega$. Par rapport aux valeurs usuellement rencontrées en TP, cette valeur est petite et sa mesure avec un ohmmètre s'annonce délicate. Cependant, des appareils de bonne qualité pourront la mesurer.

□ 6. On prend maintenant $M_1 = P$, $r_1 = \ell$, $r'_1 = \ell\sqrt{2}$, $M_2 = Q$, $r_2 = \ell\sqrt{2}$ et $r'_2 = \ell$. En utilisant le résultat de la question 2, on trouve

$$u = \frac{i}{\pi \gamma \epsilon} \ln \sqrt{2} \quad \text{et on identifie} \quad \boxed{R_{\parallel} = \frac{\ln 2}{2\pi \gamma \epsilon}} \quad .$$

□ 7. Le plus commode est d'utiliser des bobines de Helmholtz, c'est à dire deux bobines plates de même rayon b , coaxiales et séparées d'une distance b . Près du milieu de ces deux bobines, le champ est presque uniforme. On les dispose symétriquement de part et d'autre de la plaque de manière que leur axe de révolution commun soit dirigé selon $\vec{u}_z$.

□ 8. Question de cours. On trouve $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, relation qui constitue la loi d'Ohm locale, avec

$$\gamma = \frac{nq^2}{f} \quad .$$

□ 9. En présence de champ magnétique, l'équation du mouvement d'un porteur s'écrit

$$m d\vec{v}/dt = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) - f\vec{v} \quad .$$

En régime permanent, $d\vec{v}/dt = \vec{0}$ donc

$$\vec{v} = \frac{q}{f}(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad .$$

Comme $\vec{j} = nq\vec{v}$ et $\mathcal{R} = 1/(nq)$, on en déduit

$$\boxed{\vec{j} = \gamma (\vec{E} + \mathcal{R}\vec{j} \wedge \vec{B})} \quad .$$

□ 10. En régime permanent, l'équation de conservation de la charge se simplifie en $\text{div } \vec{j} = 0$.

□ 11. Ce calcul un peu technique utilise la première formule d'analyse vectorielle fournie par l'énoncé.

$$\text{rot}(\vec{j} \wedge \vec{B}) = \vec{j} \text{div} \vec{B} - (\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} - \vec{B} \text{div} \vec{j} + (\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{j} \quad .$$

On sait que $\text{div} \vec{B} = 0$ et ici, $\text{div} \vec{j} = 0$, ce qui élimine deux des termes. Ensuite, comme $\vec{B}$ est uniforme, ses dérivées sont nulles donc $(\vec{j} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{0}$. Enfin, comme $\vec{B} = B \vec{e}_z$,

$$(\vec{B} \cdot \vec{\nabla}) \vec{j} = B \frac{\partial \vec{j}}{\partial z} = \vec{0} \quad \text{car } \vec{j} \text{ ne dépend pas de } z \quad .$$

Finalement,

$$\boxed{\text{rot}(\vec{j} \wedge \vec{B}) = \vec{0}} \quad .$$

□ 12. Le résultat de la question 9 se réécrit

$$\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \mathcal{R} \vec{j} \wedge \vec{B} \quad \text{donc} \quad \text{div}(\vec{E}) = \frac{\text{div} \vec{j}}{\gamma} - \text{div}(\mathcal{R} \vec{j} \wedge \vec{B}) = 0 - \mathcal{R} \text{div}(\vec{j} \wedge \vec{B}) \quad .$$

En utilisant la seconde expression d'analyse vectorielle du formulaire, il vient

$$\text{div}(\vec{E}) = -\mathcal{R} [\vec{B} \cdot \text{rot} \vec{j} - \vec{j} \cdot \text{rot} \vec{B}] \quad .$$

Comme $\vec{B}$ est uniforme, toutes ses dérivées sont nulles et son rotationnel est nul. *Il ne faut surtout pas écrire $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ car $\vec{j}$ n'est pas la source de $\vec{B}$. Cela serait vrai s'il s'agissait du champ créé par $\vec{j}$, mais ce champ est négligé !* On obtient donc

$$\text{div}(\vec{E}) = -\mathcal{R} \vec{B} \cdot \text{rot} \vec{j} \quad .$$

Pour calculer $\text{rot} \vec{j}$, on reprend l'expression de la question 9.

$$\text{rot} \vec{j} = \gamma (\text{rot} \vec{E} + \mathcal{R} \text{rot}(\vec{j} \wedge \vec{B}))$$

D'après l'équation de Maxwell-Faraday en régime stationnaire, $\text{rot} \vec{E} = \vec{0}$; le second terme est nul d'après la question 11. Donc $\text{rot} \vec{j} = \vec{0}$ et finalement, $\text{div} \vec{E} = 0$. D'après l'équation de Maxwell-Gauss, on en déduit $\rho = 0$.

□ 13.

$$u = V(P) - V(Q) = \int_P^Q \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \vec{E}(0, y) \cdot d\vec{y}, \vec{e}_y \quad \boxed{u = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} E_y(0, y) dy}$$

□ 14. On reprend les idées des questions 1 et 3 : on somme les vecteurs $\vec{j}$ associés au fil d'arrivée et au fil de départ.

$$\vec{j} = \frac{i}{2\pi\epsilon r} \vec{e}_r - \frac{i}{2\pi\epsilon r'} \vec{e}_{r'}$$

On utilise

$$r = AM, \quad \vec{e}_r = \frac{\vec{AM}}{AM} \quad r' = DM \quad \vec{e}_{r'} = \frac{\vec{DM}}{DM}$$

Pour les points du segment $[PQ]$, $AM = DM$ et donc

$$\vec{j} = \frac{i}{2\pi\epsilon} \left(\frac{\vec{AM}}{AM^2} - \frac{\vec{DM}}{DM^2} \right) = \frac{i}{2\pi\epsilon AM^2} (\vec{AM} - \vec{DM}) = \frac{i}{2\pi\epsilon AM^2} \vec{AD} = \frac{i\ell \vec{e}_x}{2\pi\epsilon AM^2}$$

Comme $AM^2 = y^2 + (\ell/2)^2$, on a finalement

$$\vec{j}(0, y) = \frac{i\ell \vec{e}_x}{2\pi\epsilon(y^2 + (\ell/2)^2)}$$

Il est naturel d'obtenir un vecteur dirigé selon $\vec{u}_x$: en allant de A vers D , les lignes de courant croisent le segment $[PQ]$ orthogonalement, comme dans la question 4.

□ 15. Pour les points de $[PQ]$,

$$\vec{j} \wedge \vec{B} = \vec{j} \wedge B \vec{e}_z = -\frac{i\ell B \vec{e}_y}{2\pi\epsilon(y^2 + (\ell/2)^2)}$$

Comme $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} - \mathcal{R} \vec{j} \wedge \vec{B}$, on obtient en projetant

$$E_y = \frac{i\mathcal{R}\ell B \vec{e}_y}{2\pi\epsilon(y^2 + (\ell/2)^2)}$$

puis

$$u = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{i\mathcal{R}\ell B \vec{e}_y}{2\pi\epsilon(y^2 + (\ell/2)^2)} dy$$

Le changement de variable $y = \ell t/2$ conduit à

$$u = \frac{i\ell B \mathcal{R}}{2\pi\epsilon} \frac{2}{\ell} \int_{-1}^1 \frac{dt}{1+t^2}$$

En utilisant la primitive $\int dt/(1+t^2) = \arctan t$, on obtient

$$u = \frac{iB\mathcal{R}}{\epsilon} \quad \text{et} \quad R_{\perp} = \frac{B\mathcal{R}}{2\epsilon}$$

□ 16. Si on connaît la constante de Hall du matériau, mesure cette résistance peut permettre de trouver B , c'est à dire de mesurer un champ magnétique par effet Hall. Inversement, connaissant B , on peut en déduire $\mathcal{R}$ puis nq , c'est à dire accéder aux caractéristiques des porteurs de charge. Comme on le lit dans l'introduction, cette technique est utilisée en laboratoire pour analyser les propriétés des semi-conducteurs.

Conditions de formation d'un virus

ENS BCPST 2022, sujet adapté

1. On utilise des coordonnées sphériques. $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ et $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\varphi)$ sont des plans de symétrie des charges sources ; ils contiennent $\vec{E}(M)$ donc $\vec{E}(r) = E(r, \theta, \varphi) \vec{u}_r$. À cause des invariances par rotation, $E(r, \theta, \varphi)$ ne dépend en réalité que de r .

On applique le théorème de Gauss à la sphère (O, r) avec $r \neq R$.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r)$$

— si $r > R$, $Q_{\text{int}} = Q$

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon}, \quad E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} \vec{u}_r$$

— si $r < R$, $Q_{\text{int}} = 0$

$$E = 0$$

2. $\vec{E} = -\vec{\nabla}V = -\frac{dV}{dr}u_r$, on obtient en intégrant

— si $r \geq R$, $\frac{dV}{dr} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}$, $V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon r}$

— si $r \leq R$, $\frac{dV}{dr} = 0$, $V(r) = \text{Cste} = V(R)$

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon R}$$

Comme $\sigma = \frac{Q}{4\pi R^2}$, ces résultats se réécrivent :

$$r \leq R : V(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon}, \quad r \geq R : V = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon r}.$$

3. Pour un condensateur, l'énergie est $\frac{1}{2}QV$. Pour la coque,

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2}QV(R)$$

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \times 4\pi R^2 \sigma \times \frac{\sigma R}{\varepsilon} \quad \boxed{U_{\text{elec}} = \frac{2\pi R^3}{\varepsilon} \sigma^2}$$

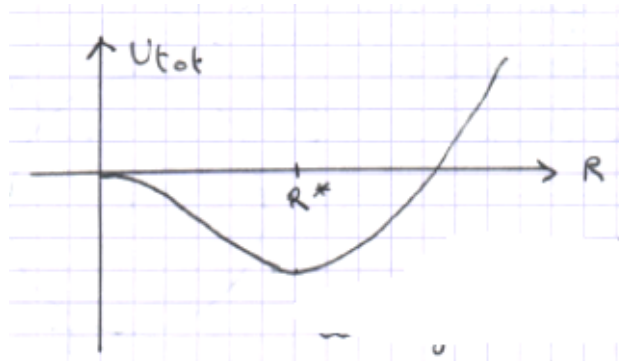
4.

$$U_{\text{tot}} = \frac{2\pi\sigma^2}{\varepsilon} R^3 - \gamma R^2$$

$$\frac{dU_{\text{tot}}}{dR} = \frac{6\pi\sigma^2}{\varepsilon} R^2 - 2R\gamma = R \left(\frac{6\pi\sigma^2}{\varepsilon} R - 2\gamma \right)$$

Cette dérivée s'annule pour

$$R^* = \frac{\gamma\varepsilon}{3\pi\sigma^2}.$$



U_{tot} est minimale en R^* : ce rayon est donc privilégié car les systèmes physiques d'énergie plus basse sont plus stables.

5.

$$\rho = ec_+ - ec_- = e(c_+ - c_-) = ec_\infty \left(\exp\left(-\frac{eV}{k_B T}\right) - \exp\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \right)$$

$$\rho = -2ec_\infty \sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$$

6. L'équation de Poisson s'écrit en coordonnées sphériques

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon} = 0 \quad \text{s'écrit} \quad \Delta V = \frac{2e}{2} c_\infty \sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right) = 0$$

Le potentiel n'est pas continu en $r = R$. L'équation est à appliquer séparément sur chacun des intervalles $[0, R[$ et $[R, \infty[$.

7. Le terme non linéaire est $\sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right)$. Si $|eV| \ll k_B T$, $\sinh\left(\frac{eV}{k_B T}\right) \sim \frac{eV}{k_B T}$ et l'équation différentielle devient linéaire :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rV) - \frac{2e^2 c_\infty}{k_B T \varepsilon} V = 0$$

Soit

$$\kappa = \sqrt{\frac{2e^2 c_\infty}{\varepsilon k_B T}}$$

L'équation différentielle s'écrit

$$\frac{d^2}{dr^2}(rV) - \kappa^2(rV) = 0$$

La constante κ est homogène à l'inverse d'une longueur.

8. Pour la fonction $r \rightarrow rV$, il s'agit d'une équation différentielle à coefficients constants. Attention : l'équation ne s'applique pas pour $r = R$ où règnent des charges surfaciques ; on résout sur les intervalles $[0, R[$ et $]R, \infty[$.

— Sur $[0, R[$, $rV = \lambda e^{\kappa r} + \mu e^{-\kappa r}$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$

En $r = 0$: $0 = \lambda + \mu$ donc $\mu = -\lambda$.

$$rV = \lambda (e^{\kappa r} - e^{-\kappa r}) = 2\lambda \sinh \kappa r$$

Soit $W = 2\lambda$. $V(r) = W \frac{\sinh \kappa r}{r}$

— Sur $]R, \infty[$, $rV = Ae^{\kappa r} + Be^{-\kappa r}$

Comme $\lim_{r \rightarrow \infty} V(r) = 0$, $A = 0$

$$V(r) = \frac{B}{r} e^{-\kappa r}$$

9. Le potentiel V est continu ; les relations précédentes s'appliquent sur $[0, R]$ et $[R, \infty[$. La continuité en R s'exprime par :

$$Be^{-\kappa R} = W \sinh(\kappa R)$$

10. Soit $\Sigma = \Sigma^+ \cup \Sigma^-$. Sur Σ^+ , la normale sortante est $\vec{u}_r$ alors que sur Σ^- , c'est $-\vec{u}_r$. Le théorème de Gauss s'écrit donc :

$$4\pi(R + \xi)^2 E(R + \xi) - 4\pi(R - \xi)^2 E(R - \xi) = 4\pi R^2 \sigma$$

Pour $\xi \rightarrow 0$, on obtient :

$$R^2 E(R^+) - R^2 E(R^-) = R^2 \sigma$$

$$E(R^+) - E(R^-) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

11. Pour $r < R$, $E = -\frac{dV}{dr} = W \left(\frac{1}{r^2} \sinh \kappa r - \frac{\kappa}{r} \cosh \kappa r \right)$

Pour $r > R$,

$$E = -\frac{dV}{dr} = B \left(\frac{1}{r^2} + \frac{\kappa}{r} \right) e^{-\kappa r}$$

La relation de discontinuité trouvée à la question précédente s'écrit :

$$B \left(\frac{1}{R^2} + \frac{\kappa}{R} \right) e^{-\kappa R} - W \left(\frac{1}{R^2} \sinh \kappa R - \frac{\kappa}{R} \cosh \kappa R \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

12. L'absence d'ion de la question 2 correspond au cas limite $c_\infty \rightarrow 0$ donc $\kappa \rightarrow 0$, plus précisément $\kappa R = \mu \rightarrow 0$.

Pour $r \leq R$,

$$V = \frac{W}{r} \sinh \kappa r$$

Quand $\kappa \rightarrow 0$, $\frac{\sinh \kappa r}{r} \rightarrow \kappa$ et comme $\mu \rightarrow 0$, $W \sim \frac{Q}{4\pi\varepsilon\mu} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon\kappa R}$

$$V(r) \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon\kappa R} \times \kappa = \frac{Q}{4\pi\epsilon R} = \frac{\sigma R}{\epsilon}$$

On retrouve le résultat de 2).

Pour $r \geq R$,

$$V = \frac{B}{r} e^{-\kappa r} \quad \text{avec} \quad B = W e^{\kappa R} \sinh(\kappa R)$$

$$V = \frac{W}{r} e^{\kappa(R-r)} \sinh(\kappa R)$$

On a vu ci-dessus : $W \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon}$ et $\sinh(\kappa R) \sim \kappa R$, donc $W \sinh \kappa R \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon}$

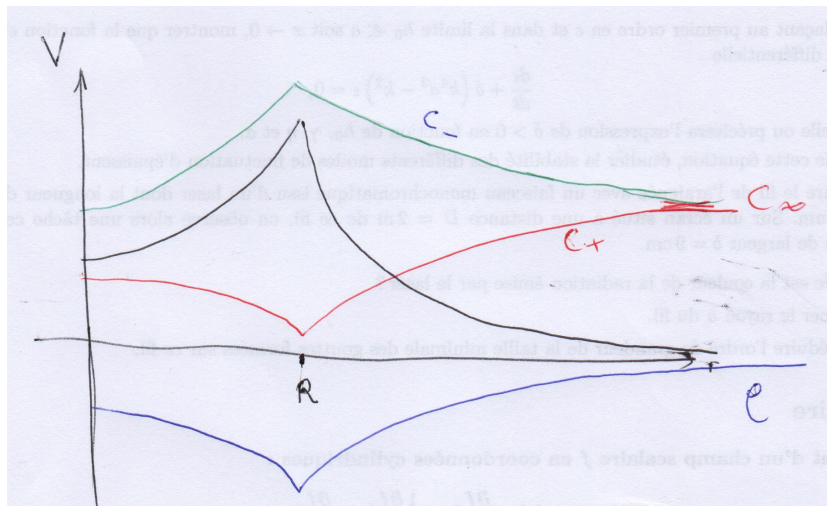
$$V \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon} \cdot \frac{1}{r} e^{\kappa R} e^{-\kappa r}$$

Comme $\kappa R \rightarrow 0$, $e^{\kappa R} \rightarrow 1$. On se limite à la région où $r \ll 1/\kappa$. Alors $\kappa r \rightarrow 0$ et $e^{-\kappa r} \rightarrow 1$.

$$V \sim \frac{Q}{4\pi\epsilon r}$$

On retrouve le résultat de 2).

13. Plus V est élevée, plus c_- est grande et plus c_+ est petite. Comme $V > 0$, $c_+ < c_\infty$ et $c_- > c_\infty$. Les cations sont repoussés par la coque positive alors que les anions sont attirés. Il est résulte que ρ négatif.



$$14. U_{\text{elec}} = \frac{1}{2} Q V(R) = \frac{1}{2} Q \cdot \frac{W}{R} \sinh \kappa R$$

$$U_{\text{elec}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{Q^2}{R} \cdot \frac{1}{4\pi\epsilon u} \frac{\sinh u}{\sinh u + \cosh u}$$

$$\boxed{U_{\text{elec}} = \frac{2\pi\sigma^2 R^3}{\epsilon} \frac{\sinh u}{u(\sinh u + \cosh u)}} \quad u = \kappa R$$

15. Pour $u \rightarrow \infty$, c'est-à-dire $\kappa R \gg 1$, $\cosh u \sim \sinh u$ donc

$$\frac{\sinh u}{\sinh u + \cosh u} \rightarrow \frac{1}{2}$$

$$U_{\text{elec}} \approx \frac{2\pi\sigma^2 R^3}{\epsilon} \cdot \frac{1}{\kappa R} \cdot \frac{1}{2} \quad U_{\text{elec}} \approx \frac{\pi\sigma^2 R^2}{\epsilon\kappa}$$

$$16. U_{\text{tot}} = U_{\text{elec}} + U_{\text{hp}} = \frac{\pi\sigma^2 R^2}{\epsilon\kappa} - \gamma R^2$$

$$U_{\text{tot}} = \left(\frac{\pi\sigma^2}{\epsilon\kappa} - \gamma \right) R^2$$

U_{tot} est maintenant une fonction monotone de R et il n'existe plus de taille privilégiée. Les virus se forment si $U_{\text{tot}} < 0$, c'est à dire si $\gamma > \frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon\kappa}$. En utilisant l'expression de κ de la question 8, on en déduit $c_\infty > c_\infty^*$ avec

$$c_\infty^* = \frac{\pi^2\sigma^4 k_B T}{2\varepsilon e^2 \gamma^2} \quad .$$

17. Le virus se forme si $U_{\text{tot}} < 0$, c'est à dire si

$$\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon\kappa} R^2 - \gamma R^2 - \frac{\pi q\sigma^3 R^2}{k_B T \varepsilon^2 \kappa^4 l^2} < 0$$

$$\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon} \kappa^3 - \gamma \kappa^4 - \frac{\pi q\sigma^3}{k_B T \varepsilon^2 l^2} < 0$$

$$\frac{\pi\sigma^2}{\varepsilon} \left(\kappa^3 - \frac{\varepsilon\gamma\kappa^4}{\pi\sigma^2} \right) < \frac{\pi q\sigma^3}{k_B T \varepsilon^2 l^2}$$

$$\kappa^3 - \frac{\kappa^4}{\kappa^*} < \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon^2 l^2}$$

$$\frac{\kappa^3}{\kappa^{*3}} - \frac{\kappa^4}{\kappa^{*4}} < \frac{9\sigma}{k_B T \varepsilon^2 l^2 \kappa^{*3}}$$

On pose $X = \frac{\kappa}{\kappa^*}$ et

$$A = \frac{q\sigma}{k_B T \varepsilon^2 l^2 \kappa^{*3}}, \quad A = \frac{q\varepsilon^2 \gamma^3}{k_B T l^2 \pi^3 \sigma^5}$$

La condition de formation des virus s'écrit

$$X^3 - X^4 < A$$

18. On voit que $f : X \mapsto X^3 - X^4$ présente un maximum voisin de 0,105 pour $X = 0,75$.

- Si $A > 0,105$, la condition de formation des virus n'est jamais remplie.
- Si $A < 0,105$, il existe deux valeurs X_1 et $X_2 > X_1$ telles que $f(X_1) = A$ et $f(X_2) = A$. La condition est remplie sur $[0, X_1]$ et sur $[X_2, \infty[$.

Énergie hydraulique
 Mines-Ponts

□ 1 – L'écoulement parfait, incompressible et permanent a lieu sous le seul effet des forces de pression et de pesanteur ce qui permet d'appliquer la relation de Bernoulli. Comme la conduite présente un section uniforme, la conservation du débit volumique implique que la vitesse V y est aussi uniforme. En suivant une ligne de courant entre un point quelconque de cote z et la point A on a donc

$$P_A + \mu g z_A + \frac{1}{2} \mu V^2 = P_1(z) + \mu g z + \frac{1}{2} \mu V^2 \quad .$$

En A , le fluide jaillit dans l'air ambiant donc $P_A = P_0$. Comme $z_A = 0$ on obtient

$$P_1(z) = P_0 \left(1 - \frac{z}{z_0} \right) \quad \text{avec} \quad z_0 = \frac{P_0}{\mu g} = 10 \text{ m} \quad .$$

Cette relation montre que la pression est d'autant plus basse que z est plus élevé. Si P_1 s'abaisse jusqu'à la pression de vapeur saturante, de la vapeur d'eau apparaît ce qui invalide le modèle. La valeur limite pour laquelle cela se produit est telle que

$$P_1(z) = P_{\text{sat}} \quad \text{d'où} \quad z = z_0 \left(1 - \frac{P_{\text{sat}}}{P_0} \right) = 9,7 \text{ m} \quad .$$

□ 2 – Comme nous l'avons vu en cours, la relation de Toricelli s'obtient en appliquant la relation de Bernoulli entre la surface de la retenue à l'altitude H , où l'eau est presque immobile, et la sortie du jet dans l'air. On obtient

$$c = \sqrt{2gH} = 77,4 \text{ m.s}^{-1} \quad .$$

Les sections d'entrée et de sortie de l'injecteur valent respectivement $\pi D^2/4$ et $\pi d^2/4$. La conservation du débit volumique s'écrit donc

$$\pi \frac{D^2}{4} V = \pi \frac{d^2}{4} c \quad \text{d'où} \quad V = \left(\frac{d}{D} \right)^2 \sqrt{2gH} \quad .$$

□ 3 – Hors de l'injecteur, la canalisation a partout la même section qu'en A donc, par conservation du débit, la vitesse y est partout égale à V . On applique à nouveau le relation de Bernoulli entre la surface de la retenue et un point quelconque de cote z de la canalisation.

$$P_0 + \mu g H = P_2(z) + \mu g z + \frac{1}{2} \mu V^2 \quad \boxed{P_2(z) = P_0 + \mu g (H - z) - \mu g H \left(\frac{d}{D} \right)^4}$$

Cette pression est minimale à l'entrée de la canalisation pour laquelle l'énoncé admet que z est presque égale à H ¹. On se demande quel est l'intérêt d'introduire h).

$$P_{\min} = P_0 - \mu g H \left(\frac{d}{D} \right)^4 \quad .$$

On évite la cavitation si $P_{\min} > P_{\text{sat}}$ c'est à dire si

$$d < d_0 \quad \text{avec} \quad d_0 = D \left(\frac{P_0 - P_{\text{sat}}}{\mu g H} \right) = 25,4 \text{ cm} \quad .$$

□ 4 – La relation de la question 2 donne $H' = \frac{c'^2}{2g} = 274 \text{ m}$. Le facteur de contraction vaut $C_c = 0,91$. Cela signifie que l'eau sort un peu moins vite de prévue, comme si elle venait d'un peu moins haut. Cet écart s'explique par les pertes d'énergie provoquées par la viscosité de l'eau tout au long de la canalisation.

□ 5 –

$$q = \pi \frac{d^2}{4} c = 875 \text{ l.s}^{-1} \quad D_m = \mu q = 875 \text{ kg.s}^{-1}$$

La puissance cinétique est l'énergie cinétique de l'eau qui sort du tuyau par unité de temps. Pendant dt , la masse injectée est $\mu q' dt$ et son énergie cinétique $dE_c = \mu q' dt \times \frac{1}{2} c'^2$. Donc

$$P_c = \frac{dE_c}{dt} = \frac{1}{2} \mu q' c'^2 = \frac{1}{2} \mu \frac{\pi d^2}{4} c'^3 = 2,3 \text{ MW} \quad .$$

1. (

□ 6 – S'il n'y avait aucune perte C_c serait égal à 1 et c' serait égal à c . Dans ce cas, la puissance cinétique vaudrait

$$P_{c \text{ idéal}} = \frac{1}{2} \mu q c^2 = \mu q g H \quad .$$

C'est cette grandeur, atteinte dans une situation optimale, que l'on nomme puissance potentielle. Elle correspond au fait que l'eau venant de l'altitude H convertit toute son énergie potentielle de pesanteur en énergie potentielle.

$$\eta = \frac{c'^3}{c^3} = \left(\frac{H'}{H} \right)^{3/2} = 0,87 \quad .$$

□ 7 – Ce dédoublement permet d'équilibrer les efforts entre la droite et la gauche de l'auget de manière à ne pas exercer sur la roue d'effort colinéaire à l'axe de rotation, ce qui pourrait le détériorer ou conduire à une usure prématurée.

□ 8 – Dans $\{L'\}$, l'auget est fixe. Le jet arrivant à vitesse constante rencontre donc un obstacle fixe qui le dévie et repousse l'eau vers l'arrière. Ces conditions de bord fixent conduisent à un écoulement permanent.

Par la loi de composition des vitesses, la vitesse du jet incident dans $\{L'\}$ est

$$\vec{c}_{\text{inc}} = c \vec{e}_x - u \vec{e}_x = (c - u) \vec{e}_x \quad .$$

L'énoncé indique que l'eau est déviée dans la direction opposée à la direction incidente et que la puissance est conservée, ce qui signifie que la norme de la vitesse ne change pas. Donc

$$\vec{c}_d = -\vec{c}_{\text{ind}} = (u - c) \vec{e}_x \quad .$$

La quantité $D'_m = \mu s c_{\text{inc}}$ représente le débit massique du jet incident dans le référentiel $\{L'\}$.

□ 9 – On considère le système fermé Σ représenté aux deux instants t et $t + dt$.

$$\begin{aligned} \vec{P}'(t) &= \vec{P}'_{\text{com}}(t) + D'_m dt \vec{c}_{\text{inc}} \\ \vec{P}'(t + dt) &= \vec{P}'_{\text{com}}(t + dt) + D'_m dt \vec{c}_d \\ d\vec{P}' &= \vec{P}'(t + dt) - \vec{P}'(t) = d\vec{P}'_{\text{com}} + D'_m dt (\vec{c}_d - \vec{c}_{\text{inc}}) \end{aligned}$$

Comme l'écoulement est permanent dans $\{L'\}$, $d\vec{P}'_{\text{com}} = \vec{0}$ et

$$\frac{d\vec{P}'}{dt} = -2D'_m(c - u) \vec{e}_x \quad .$$

L'eau de Σ est soumise, de la part de l'auget, à une force $-\vec{F}_{\text{eau/A}}$ opposée à celle qu'elle exerce elle-même sur cet auget. Elle est aussi soumise à des forces de pression atmosphérique sur les portions du jet en contact avec l'air. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc

$$\begin{aligned} -2D'_m(c - u) \vec{e}_x &= -\vec{F}_{\text{eau/A}} + \vec{F}_{P_0/\text{eau}} \\ \text{d'où } \vec{F}_{\text{eau/A}} &= 2D'_m(c - u) \vec{e}_x + \vec{F}_{P_0/\text{eau}} \quad . \end{aligned}$$

Nous avons omis le poids, qui disparaîtra de toute façon si, comme l'énoncé le demande, on s'intéresse à la projection sur (Ox) . L'auget est aussi soumis à des forces de pression atmosphérique, se sorte qu'au total les fluides exercent sur lui la force

$$\vec{F} = \vec{F}_{\text{eau/A}} + \vec{F}_{P_0/A} = 2D'_m(c - u) \vec{e}_x + \vec{F}_{P_0/\text{eau}} + \vec{F}_{P_0/A}$$

La surface de l'eau et celle de l'auget en contact avec l'air forment une surface fermée, sur la quelle la somme des forces de pression atmosphérique est nulle. La somme des deux derniers termes est donc nulle.

$$F_x = 2D'_m(c - u) = 2\mu Q'(c - u)$$

□ 10 – En suivant l'indication subtile de l'énoncé, on a $F_x = 2\mu Q(c - u)$. Comme l'auget est assez petit, cette force s'exerce presque à la distance R de l'axe de rotation de la roue et son moment est

$$\Gamma = R F_x = 2\mu R Q'(c - u) \quad .$$

□ 11 –

$$P = \Gamma\omega = \Gamma \frac{u}{R} = 2\mu Qu(c - u)$$

$$\eta_{\text{rot}} = \frac{2\mu Qu(c - u)}{\frac{1}{2}\mu Qu^2} \quad \boxed{\eta_{\text{rot}} = 4 \frac{u}{c} \left(1 - \frac{u}{c}\right)}$$

Il suffit d'étudier la fonction $x \rightarrow x(1 - x)$ pour voir que le rendement est maximal pour $u/c = 1/2$ et qu'il vaut alors $\eta_{\text{rot max}} = 1$. Cela semble miraculeux : toute l'énergie cinétique du jet est récupérée par la turbine. La question suivante fournit une interprétation de ce résultat.

□ 12 – Pour $c = 2u$, $\vec{c}_{\text{ind}} = u \vec{e}_x$ et $\vec{c}_d = -u \vec{e}_x$. La vitesse de sortie dans $\{L\}$ s'obtient par la loi de composition des vitesses

$$\vec{c}_s = \vec{c}_d + u \vec{e}_x = \vec{0} \quad .$$

Après son passage dans la turbine, l'eau est donc immobile, sa puissance cinétique est devenue nulle car elle a cédé toute son énergie à la turbine.

□ 13 – On a $u = R\omega$ donc $R = u/\omega = c/(2\omega) = 47 \text{ cm}$. Cette valeur semble réaliste au vu de la photographie fournie par l'énoncé. Pour l'application numérique, il faut bien sûr convertir les tours par minute en radians par seconde ! La puissance maximale est

$$P_{\text{max}} = P_c = \frac{1}{2} \mu q c^2 = 4,1 \text{ MW} \quad .$$

□ 14 –

$$P = 0,87 P_{\text{max}} = 3,6 \text{ MW} \quad .$$

Des frottements visqueux dans l'écoulement contre l'auget expliquent sans doute qu'on atteint pas le rendement maximale de 100%. Une partie de l'énergie se trouve dissipée, convertie en chaleur. Par ailleurs, à cause de la forme incurvée des augets, il est possible que l'eau ne soit pas exactement repoussée vers l'arrière, mais légèrement de côté, en conservant donc une fraction de sa vitesse initiale au lieu de transférer toute son énergie à la turbine.