

Exercice 1. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer l'espérance de $\frac{1}{X+1}$.

Exercice 2. (*) On lance deux dés équilibrés à n faces. Les résultats sont modélisés par deux variables aléatoires U_1 et U_2 , supposées indépendantes.

On pose $X = \min(U_1, U_2)$ et $Y = \max(U_1, U_2)$.

- Déterminer la loi et l'espérance de X .
- Calculer $X + Y$ en fonction de U_1 et U_2 . En déduire l'espérance de Y .
- Calculer de même XY et en déduire la covariance de (X, Y) .

Exercice 3. (*) Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $Z_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

- Déterminer la loi de Y_n puis calculer son espérance et sa variance.
- Soit $(i, j) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $i \neq j$. Les variables aléatoires Y_i et Y_j sont-elles indépendantes ?
- Calculer la variance de Z_n .
- Pour tout $\varepsilon > 0$, montrer que $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n} - p^2\right| \geq \varepsilon\right)$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 4. ()** Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On considère des variables aléatoires $U_1, \dots, U_k$ indépendantes, de loi uniforme sur l'ensemble $\{-1; 1\}$. On note

$$S_k = \sum_{i=1}^k U_i.$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(\lambda) = \ln(\mathbb{E}(e^{\lambda U_1}))$.

- Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, prouver l'inégalité $\varphi(\lambda) \leq \lambda^2/2$.
- (***) Soit $t \in \mathbb{R}$. Pour tout $\lambda > 0$, prouver l'inégalité $\mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp(k\varphi(\lambda) - \lambda t)$.
- En déduire l'inégalité de Hoeffding

$$\forall t > 0, \quad \mathbb{P}(S_k \geq t) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2k}\right).$$

Exercice 5. (*) On considère une suite infinie de tirages à pile ou face avec une pièce équilibrée. On suppose que cette expérience est modélisée par un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Les tirages sont supposés mutuellement indépendants.

Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note P_n l'événement « *Le n -ième lancer a donné pile.* » et on note F_n son événement contraire.

Pour tout entier n , on note D_n l'événement « *Lors des n premiers lancers, il n'y a pas eu deux lancers consécutifs qui aient donné pile.* » La probabilité de l'événement D_n est notée d_n .

- Calculer d_0 , ainsi que d_1 et d_2 .
- Établir la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad d_{n+2} = \frac{1}{2}d_{n+1} + \frac{1}{4}d_n.$$

- En déduire une expression de d_n en fonction de n puis sa limite quand n tend vers $+\infty$. Interpréter.

Exercice 6. (*) On se place dans le même contexte que l'exercice précédent. Albertine et Barnabé jouent à un jeu basé sur l'observation des résultats des lancers de la pièce. Albertine gagne si une succession (pile, pile, face) apparaît avant qu'une succession (face, pile, pile) n'apparaisse. Barnabé gagne si une succession (face, pile, pile) apparaît avant qu'une succession (pile, pile, face) n'apparaisse. Si aucune de ces successions ne se produit, aucun des deux ne gagne.

Le but de cet exercice est de déterminer lequel des deux personnages a le plus de chances de gagner.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on note N_n l'événement « Aucun des deux joueurs n'a gagné à l'issue des n premiers lancers. »

Calculer $\mathbb{P}(N_1)$ et $\mathbb{P}(N_2)$.

b. Pour tout entier $n \geq 3$, prouver l'égalité $\mathbb{P}(N_n) = 2^{-n} + d_n$.

c. En déduire que la probabilité d'un match nul est nulle.

d. Calculer la probabilité de victoire d'Albertine. En déduire celle de Barnabé. Commenter.

Exercice 7. (*) Déterminer les variables aléatoires discrètes indépendantes d'elles-mêmes.

Exercice 8. (*) Montrer qu'en posant $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{P}(X = k) = \frac{1}{k(k+1)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on définit la loi d'une variable aléatoire discrète X . Calculer son espérance. La variable aléatoire $(-1)^X X$ est-elle d'espérance finie ?

Exercice 9. (*) Montrer que si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$, alors la valeur maximale de $\mathbb{P}(X = k)$ est atteinte pour $k = \lfloor \lambda \rfloor$.

Exercice 10. (*) Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Calculer $\mathbb{E}(1/(X+1))$.

Exercice 11. (*) Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer $\mathbb{E}(1/X)$.

Exercice 12. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on suppose que $\mathbb{P}(X = k) > 0$ et on note $\mathbb{E}(Z|X = k)$ l'espérance de Z pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{(X=k)}$.

Justifier l'égalité $\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{E}(Z|X = k)\mathbb{P}(X = k)$.

Cette identité s'appelle *formule de l'espérance totale*.

Exercice 13. ()** Soit $p \in]0, 1[$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p . On considère une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de Z sachant $[X = k]$ soit uniforme sur $\llbracket 0, k-1 \rrbracket$.

a. Donner $\mathbb{P}_{[X=k]}(Z = j)$ pour tout $(j, k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$.

b. Déterminer la loi de Z (sans chercher à simplifier les sommes obtenues).

c. En déduire un calcul de $\mathbb{E}(Z)$.

d. Retrouver ce résultat au moyen de la formule de l'espérance totale.

Exercice 14. (*) Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$. On note Z le maximum des nombres X et Y . On pose $S = X + Y$ et $D = X - Y$.

a. Justifier que Z est une variable aléatoire. Déterminer sa loi et son espérance.

b. Déterminer les lois de S et de D .

c. Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

Exercice 15. ()** Soit p dans $]0, 1[$. Soit $(T_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes qui suivent la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n T_k$.

a. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, déterminer la fonction génératrice de S_n . En déduire sa loi.

b. Déterminer la loi de T_1 sachant $[S_2 = k]$. Interprétation.

c. Pour tout $n \geq 2$, calculer l'espérance de $\frac{n-1}{S_n-1}$.

Exercice 16. (*) On considère deux variables X et Y indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$.

a. Montrer que $X + Y$ suit la loi $\mathcal{P}(\lambda + \mu)$.

b. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[X + Y = n]$. Reconnaître une loi usuelle.

Exercice 17. (*) On considère deux variables aléatoires X et Z . On suppose que Z suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et que pour tout entier naturel n la loi de X sachant $[Z = n]$ est $\mathcal{B}(n, p)$.

Montrer que X suit une loi de Poisson et préciser son paramètre.

Exercice 18. ()** On considère un vecteur aléatoire (X, Y) sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, dont l'univers image est

$$(X, Y)(\Omega) = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2, \quad 0 \leq i \leq j\}$$

et pour lequel il existe deux constantes $\alpha \in \mathbb{R}$ et $p \in]0, 1[$ telles que la loi du couple (X, Y) soit donnée par

$$\forall (i, j) \in (X, Y)(\Omega), \quad \mathbb{P}((X, Y) = (i, j)) = \alpha p^j.$$

1. Exprimer en fonction de p et α la loi marginale de X . En déduire la valeur de α en fonction de p .

2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $X + 1$. En déduire $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

3. Déterminer la loi de la variable aléatoire Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

4. On pose $Z = Y - X$. Montrer que Z a la même loi que X . En déduire l'espérance de Y .

5. Montrer que X et Z sont indépendantes. En déduire la variance de Y .

6. Pour tout j dans $\mathbb{N}$, déterminer la loi de X sachant $[Y = j]$.

Exercice 19. ()** Soit $\lambda > 0$. Soit $p \in]0, 1[$.

Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. Soit Y une variable aléatoire de loi $\mathcal{G}(p)$.

On considère la matrice aléatoire $M = \begin{pmatrix} X & Y \\ Y & X \end{pmatrix}$. On considère les événements

$$A = (M \text{ est diagonalisable}), \quad B = (M^4 = I_2), \quad C = (M^{10} = I_2).$$

Calculer les probabilités de ces événements.

Exercice 20. ()** Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi de X_n est $\mathcal{B}(1/n)$.

On pose $T = \min\{n \in \mathbb{N}^* ; X_n = 1, X_{n+1} = 0\}$.

1. Déterminer la loi de T . On vérifiera en particulier que T est presque sûrement finie.

2. Calculer l'espérance et la variance de T .

Exercice 21. ()** Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'événements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On pose

$$A = \bigcap_{p \in \mathbb{N}} \bigcup_{n \geq p} A_n.$$

1. On suppose que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est convergente. Prouver que $\mathbb{P}(A)$ est nul.
2. On suppose que les A_n sont mutuellement indépendants et que la série $\sum \mathbb{P}(A_n)$ est divergente. On veut prouver que $\mathbb{P}(A)$ vaut 1.

Pour tout p dans $\mathbb{N}$, on introduit l'événement $I_p = \bigcap_{n \geq p} \overline{A_n}$.

- a. Pour tout $x \geq 0$, prouver l'inégalité $1 - x \leq e^{-x}$.
 - b. Soit $p \in \mathbb{N}$. Soit un entier $r \geq p$. Prouver l'inégalité $\mathbb{P}\left(\bigcap_{r \geq n \geq p} \overline{A_n}\right) \leq \exp\left(-\sum_{r \geq n \geq p} \mathbb{P}(A_n)\right)$.
 - c. En déduire que I_p est de probabilité nulle.
 - d. Conclure. (On a alors démontré le *lemme de Borel-Cantelli*.)
3. On fixe p dans $]0, 1[$ et on considère une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$.
On fixe un entier $k \in \mathbb{N}^*$ ainsi qu'un k -uplet $(a_1, \dots, a_k)$ dont les termes valent 0 ou 1. Le but de cette question est de montrer que ce motif apparaît presque sûrement une infinité de fois dans la suite $(X_n)_{n \geq 1}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'événement

$$A_n = \bigcap_{i=1}^k (X_{nk+i} = a_i).$$

- a. Montrer que les A_n sont mutuellement indépendants.
- b. Conclure à l'aide du lemme de Borel-Cantelli.

Exercice 22. Formule de Wald (**)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. Toutes les variables aléatoires de cet exercice sont définies sur cet espace probabilisé.

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On considère une suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires indépendantes ayant la même loi que X . On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$.

Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, que l'on suppose indépendante des X_n .

Pour tout $\omega \in \Omega$, on pose $S(\omega) = \sum_{n=1}^{N(\omega)} X_n(\omega) = S_{N(\omega)}(\omega)$.

On note en particulier que S prend la valeur 0 lorsque N vaut 0.

- a. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'ensemble $\{S = k\}$ au moyen d'événements faisant intervenir N et certains X_n . En déduire que S est une variable aléatoire.
- b. Exprimer la loi de S .
- c. Pour tout $t \in [0, 1]$, montrer les égalités

$$G_S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N = n) G_{S_n}(t) \quad \text{puis} \quad G_S(t) = G_N(G_X(t)).$$

- d. On suppose que N et X sont d'espérance finie. Montrer alors que S est d'espérance finie et exprimer son espérance.