

Problème I (*)

On définit sur $[-1, 1]$ la fonction $f : x \mapsto \text{Arcsin}^2(x)$.

Question 1. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, prouver la relation

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n}}{4^n}.$$

Question 2. Prouver que la fonction f est développable en série entière sur l'intervalle $] - 1, 1[$ et exprimer son développement en série entière sous la forme

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} d_n x^{2n}.$$

Le coefficient d_n sera exprimé sous la forme d'une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

Question 3. Pour tout x dans $] - 1, 1[$, prouver l'égalité $(1-x^2)f''(x) - xf'(x) = 2$.

Question 4. En déduire une relation de récurrence entre les coefficients d_n puis trouver une expression simplifiée de d_n .

Problème II — formules de Cramer (*)

On considère une matrice A de $\text{GL}_n(\mathbb{R})$ et on note $A_1, \dots, A_n$ ses colonnes. On se donne une colonne Y de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et on note X l'unique vecteur colonne vérifiant l'égalité

$$A \cdot X = Y.$$

Le but est de prouver, pour tout j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, la relation $x_j = \frac{\det(\Delta_j)}{\det(A)}$, où Δ_j est la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ obtenue à partir de la matrice A en remplaçant sa j -ième colonne par la colonne Y .

Question 5. Écrire la colonne Y comme combinaison linéaire des colonnes de A .

Question 6. Soit j dans $\llbracket 1, n \rrbracket$. Prouver l'égalité $\det(\Delta_j) = x_j \det(A)$.

Problème III — inégalité de Hadamard ()**

Dans ce problème, on fixe un entier $n \geq 2$. On se donne une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et on note ses colonnes $A_1, \dots, A_n$. L'objectif de ce problème est de prouver la majoration

$$|\det(A)| \leq \prod_{j=1}^n \|A_j\|,$$

où $\| \cdot \|$ désigne la norme euclidienne associée au produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Question 7. Prouver la majoration annoncée dans le cas où A n'est pas inversible.

Dans la suite, on suppose que la matrice A est inversible.

La famille $\mathcal{A} = (A_1, \dots, A_n)$ est donc une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. La méthode de Gram-Schmidt, appliquée à cette base, donne une base orthonormée $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note P la matrice représentative de la base $\mathcal{A}$ dans la base $\mathcal{U}$ et U la matrice dont les colonnes sont $U_1, \dots, U_n$.

Question 8. Justifier que la matrice P est triangulaire supérieure.

Question 9. Trouver une relation entre les matrices A , P et U . En déduire l'égalité $|\det(A)| = |\det(P)|$.

Question 10. On note $p_{i,j}$ les coefficients de la matrice P . Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, justifier les relations

$$|p_{i,i}| = |A_i^T \cdot U_i| \leq \|A_i\|.$$

Question 11. Conclure.

Problème IV — développement en série entière de l'inverse d'une fonction (*)**

Dans ce problème, on utilise l'inégalité de Hadamard pour prouver un résultat sur les fonctions développables en série entière.

On fixe une suite réelle $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que a_0 soit non nul. On définit alors une suite réelle $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en posant $b_0 = \frac{1}{a_0}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^n a_k b_{n-k}.$$

On a en particulier $\sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}^*$.

Pour tout entier n dans $\mathbb{N}^*$, on note A_n la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ définie par

$$A_n = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & a_0 & \ddots & & & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & a_0 & 0 \\ a_n & \cdots & \cdots & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

En particulier, la matrice A_n est inversible.

Question 12. Calculer le produit matriciel $A_n \times \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.

Question 13. Appliquer une formule de Cramer pour exprimer b_n sous la forme $\frac{\det(B_n)}{\det(A_n)}$, où B_n est une matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ à préciser.

Question 14. On fait maintenant l'hypothèse qu'il existe r réel strictement positif tel que la série $\sum_{n \geq 0} |a_n| r^n$ converge.

On note C la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| r^n$.

Montrer que la série $\sum_{n \geq 0} (a_n)^2 r^{2n}$ converge et montrer la majoration $\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n)^2 r^{2n} \leq C^2$.

Question 15. On note Z_n la matrice de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ obtenue à partir de B_n en multipliant la i -ième ligne de B_n par r^{i-1} pour tout i dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

15.a. Quelle relation y a-t-il entre $\det(Z_n)$ et $\det(B_n)$?

15.b. Appliquer l'inégalité de Hadamard à la transposée de Z_n . En déduire l'inégalité $|\det(Z_n)| \leq C^n \times r^{n(n-1)/2}$.

15.c. En déduire l'existence d'une constante réelle α strictement positive indépendante de n , que l'on explicitera, vérifiant la majoration

$$|b_n| \leq \frac{\alpha^n}{|a_0|}.$$

Question 16. Soit $R > 0$. On considère une fonction f définie et développable en série entière sur le segment $] -R, R[$. On suppose que $f(0)$ n'est pas nul.

Montrer que la fonction $\frac{1}{f}$ est alors développable en série entière au voisinage de 0.