

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — Résolution d'une équation différentielle

On fixe un nombre $\omega > 0$. On suppose que ω n'est pas un entier. On considère l'équation différentielle (E_ω) suivante

$$(1 - x^2)z''(x) - xz'(x) + \omega^2 z(x) = 0,$$

dont l'inconnue est une fonction $z \in \mathcal{C}^2(]-1, 1[, \mathbb{R})$.

On admet le *théorème de Cauchy linéaire*, selon lequel pour tout couple $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution de (E_ω) vérifiant les conditions initiales

$$z(0) = u \quad \text{et} \quad z'(0) = v.$$

Cette unique solution sera notée $h_{u,v}$.

Le but de ce problème est de trouver toutes les solutions de cette équation différentielle et d'en exprimer une en particulier.

Partie 1

On définit deux suites réelles $(a_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ en posant

$$\begin{cases} a_0(\omega) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n(\omega) = \frac{1}{(2n)!} \prod_{k=0}^{n-1} ((2k)^2 - \omega^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} b_0(\omega) = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n(\omega) = \frac{1}{(2n+1)!} \prod_{k=0}^{n-1} ((2k+1)^2 - \omega^2). \end{cases}$$

Question 1. Trouver des relations de récurrence pour les suites $(a_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}}$.

Question 2. Montrer que les séries entières $\sum_{n \geq 0} a_n(\omega)x^{2n}$ et $\sum_{n \geq 0} b_n(\omega)x^{2n+1}$ ont un rayon de convergence égal à 1.

On peut alors définir de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ les fonctions

$$f_\omega : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\omega)x^{2n} \quad \text{et} \quad g_\omega : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n(\omega)x^{2n+1}.$$

Question 3. Vérifier que les fonctions f_ω et g_ω sont solutions sur $]-1, 1[$ de (E_ω) .

Question 4. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Montrer l'égalité

$$h_{u,v} = u \times f_\omega + v \times g_\omega,$$

où $h_{u,v}$ est la fonction introduite dans le préambule en lien avec le théorème de Cauchy linéaire.

Partie 2

On considère la fonction $T_\omega : x \mapsto \cos(\omega \operatorname{Arccos}(x))$.

Question 5. Justifier que la fonction T_ω est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $] -1, 1[$ et exprimer ses deux premières dérivées.

Question 6. Vérifier que T_ω est solution sur $] -1, 1[$ de l'équation différentielle (E_ω) .

Question 7. En déduire que la fonction T_ω est développable en série entière sur $] -1, 1[$ et préciser son développement.

Problème 2 — Théorème de Liouville

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que $\operatorname{R} \left(\sum_{n \geq 0} a_n z^n \right) = +\infty$.

On définit alors une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$f(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n.$$

Question 8. Soit $r \in [0, +\infty[$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, démontrer l'égalité

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikt} f(re^{it}) dt = a_k r^k.$$

Pour cela, on effectuera une intégration terme à terme en la justifiant soigneusement.

Question 9. On suppose qu'il existe $c \geq 0$ tel que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |f(z)| \leq c.$$

Pour tout $r > 0$ et tout $k \in \mathbb{N}^*$, démontrer alors la majoration $|a_k| \leq \frac{c}{r^k}$.

En déduire que la fonction f est constante.

Problème 3 — Matrice extraite d'une matrice symétrique

Dans ce problème, on fixe un entier $n \geq 2$.

On rappelle que le produit scalaire canonique sur $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ est donné par

$$(X|Y) = X^T \times Y.$$

Partie 1 — quotient de Rayleigh

On considère une matrice $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on sait que le polynôme caractéristique de S se factorise sur $\mathbb{R}$ sous la forme

$$\chi_S = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$$

et on suppose que les valeurs propres de S sont numérotées dans l'ordre croissant

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n.$$

Le théorème spectral donne aussi l'existence d'une base orthonormée $(P_1, \dots, P_n)$ de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de S respectivement associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Pour tout vecteur U non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose $q_S(U) = \frac{(U|SU)}{(U|U)}$.

Question 10. Soit $U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On introduit sa décomposition dans la base $(P_1, \dots, P_n)$

$$U = \sum_{k=1}^n v_k P_k.$$

Montrer alors l'égalité $(U|SU) = \sum_{k=1}^n \lambda_k v_k^2$.

Question 11. Pour tout vecteur U non nul de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, prouver l'encadrement $\lambda_1 \leq q_S(U) \leq \lambda_n$.

Question 12. Prouver les égalités

$$\lambda_1 = \min \{q_S(U) ; U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\} \quad \text{et} \quad \lambda_n = \max \{q_S(U) ; U \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \setminus \{0\}\}.$$

Partie 2 — matrices extraites

Dans cette partie, on considère les matrices symétriques réelles

$$S = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On associe à la matrice S les notations $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ et (P_1, P_2, P_3) comme dans la partie 1.

Question 13. Déterminer les éléments propres des matrices A et B .

Question 14. Ces matrices sont-elles des éléments de $\mathcal{S}_2^{++}(\mathbb{R})$? de $\mathcal{S}_2^+(\mathbb{R})$?

Question 15. Étant donné un vecteur U non nul de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, on considère les vecteurs $a(U)$ et $b(U)$ de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ définis par blocs par

$$a(U) = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b(U) = \begin{pmatrix} 0 \\ U \end{pmatrix}.$$

Vérifier alors les égalités

$$q_A(U) = q_S(a(U)) \quad \text{et} \quad q_B(U) = q_S(b(U)).$$

Question 16. En déduire les inégalités $\lambda_1 \leq 0$ et $\lambda_3 \geq 6$.

Question 17. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \text{Vect}(P_1, P_2) \quad \text{et} \quad G = \text{Vect}(P_2, P_3)$$

de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

Par analogie avec les raisonnements de la partie 1, donner sans démonstration les valeurs de

$$\max \{q_S(Z) ; Z \in F \setminus \{0\}\} \quad \text{et} \quad \min \{q_S(Z) ; Z \in G \setminus \{0\}\}.$$

Question 18. Montrer qu'il existe un vecteur U non nul dans $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ tel que $a(U) \in F$ et en déduire l'inégalité

$$\lambda_2 \geq 2.$$

Question 19. Montrer de même l'inégalité $\lambda_2 \leq 5$.

Question 20. On considère le vecteur $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

Calculer $q_S(Z)$ et en déduire une inégalité sur λ_1 .

Question 21. La matrice S est-elle un élément de $\mathcal{S}_3^+(\mathbb{R})$?

Problème 4 — Une matrice orthogonale de taille 3

On munit $\mathbb{R}^3$ de son produit scalaire canonique et de sa base canonique

$$\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3),$$

qui est orthonormée pour le produit scalaire canonique. On munit $\mathbb{R}^3$ de l'orientation définie par la base $\mathcal{E}$.

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice

$$A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Question 22. Vérifier que A est une matrice orthogonale.

Question 23. Justifier que f est une isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$.

Question 24. Vérifier que le vecteur $a = (1, -3, -1)$ est un vecteur propre de f pour la valeur propre 1.

Question 25. Justifier que l'espace propre $E_1(f)$ est la droite dirigée par a .

Question 26. On considère le vecteur $b = (1, 0, 1)$, qui est orthogonal à a . Construire un vecteur c de $\mathbb{R}^3$ orthogonal à b tel que la famille

$$\mathcal{F} = \left(\frac{a}{\|a\|}, \frac{b}{\|b\|}, \frac{c}{\|c\|} \right)$$

soit une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.

Question 27. On note B la matrice de f relativement à la base $\mathcal{F}$. Déterminer cette matrice.

Question 28. Vérifier que le plan $P = \text{Vect}(b, c)$ est stable par f .

Question 29. Montrer que l'endomorphisme de P induit par f est une rotation et préciser une mesure de l'angle de cette rotation.
