

PC* — mathématiques
Devoir surveillé n° 6 — piste rouge

jeudi 12 février 2026
durée : 4 heures

Quelques consignes

- Ne pas utiliser de blanc correcteur.
- Écrire lisiblement et dans un français normal (sans abréviation).
- Écrire les numéros des questions dans la marge et respecter la numérotation de l'énoncé.
- Ne pas recopier l'énoncé (ni les titres des parties) et ne pas redéfinir les objets introduits par l'énoncé.

Problème 1 — Une équation matricielle

Le but de ce problème est de résoudre l'équation $M^2 + M^T = I_n$, d'inconnue $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Partie 1 — adjoint d'un endomorphisme

On considère un espace euclidien E . On se donne une base orthonormale $\mathcal{E} = (e_1, \dots, e_n)$ de E .

Soit u un endomorphisme de E . On note A la matrice représentative de u dans la base $\mathcal{E}$.

On appelle *adjoint* de u tout endomorphisme v de E tel que

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (u(x)|y) = (x|v(y)).$$

Question 1. Dans cette question, on suppose que u possède un adjoint v . Déterminer la matrice représentative de v dans la base $\mathcal{E}$.

Question 2. Montrer que u possède exactement un adjoint.

L'adjoint de l'endomorphisme u sera noté u^* .

Question 3. Montrer que l'application $u \mapsto u^*$ est un automorphisme de l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E)$.

Question 4. Montrer que $\text{Ker}(u^* \circ u) = \text{Ker}(u)$.

Partie 2 — analyse

On fixe un entier $n \geq 2$. On note $\mathcal{E} = (E_1, \dots, E_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pose $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\beta = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}$.

Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On lui associe l'endomorphisme

$$f_M : U \mapsto M \times U$$

de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On rappelle que $M_{\mathcal{E}}(f_M) = M$.

On suppose que $M^2 + M^T = I_n$.

Question 5. Trouver un polynôme annulateur de M de degré 4.

Question 6. Justifier que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, \alpha, \beta\}$.

Question 7. Justifier que $\text{Ker}(M^2 - M)$ est stable par M et par M^T .

On pose $F = \text{Ker}(M^2 - M)$.

On note m l'endomorphisme de F induit par M et m_t l'endomorphisme de F induit par M^T .

Question 8. Montrer que $m_t = m^*$.

Question 9. Montrer que $m + m^* = \text{Id}_F$ et $m^* \circ m = 0$.

Question 10. En déduire que m est l'endomorphisme nul de F puis que F est de dimension 0.

Question 11. En déduire que la matrice M est symétrique.

Partie 3 — résolution

Question 12. Donner une description de l'ensemble des solutions de l'équation $M^2 + M^T = I_n$.

Problème 2 — Théorème d'Abel de continuité radiale

Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite complexe. On suppose que la série $\sum_{n \geq 0} a_n$ converge.

Question 13. Justifier qu'on peut alors définir la fonction

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

sur le segment $[0, 1]$.

Le but de ce problème est de justifier que la fonction f est continue sur $[0, 1]$.

Pour cela, on introduit pour tout $N \in \mathbb{N}$ les fonctions

$$S_N : x \mapsto \sum_{n=0}^N a_n x^n \quad \text{et} \quad R_N : x \mapsto \sum_{n=N+1}^{+\infty} a_n x^n,$$

définies de $[0, 1]$ dans $\mathbb{C}$.

Enfin, pour tout $N \in \mathbb{N}$, on pose $\mu_N = \sup \{|R_n(1)| ; n \in \llbracket N, +\infty \rrbracket\}$.

Partie 1 – démonstration du théorème d'Abel

Question 14. Justifier que les termes de la suite $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$ sont bien définis.

Question 15. Montrer que la suite $(\mu_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Question 16. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} R_n(1)x^n$ vaut au moins 1.

Question 17. Pour tout $N \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0, 1]$, montrer l'égalité

$$R_N(x) = R_N(1)x^{N+1} - (1-x) \sum_{k=N+1}^{+\infty} R_k(1)x^k.$$

Question 18. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, en déduire la majoration $\|R_N\|_{\infty, [0, 1]} \leq 2\mu_N$.

Question 19. Justifier que la fonction f est continue sur $[0, 1]$.

Partie 2 — Quelques exemples

Question 20. Grâce au théorème d'Abel, démontrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$.

Question 21. Grâce au théorème d'Abel, démontrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$.

Question 22. Démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \operatorname{Arcsin}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{x^{2n+1}}{2^{2n}(2n+1)}$$

et en déduire la valeur de la somme $\sum_{n=0}^{+\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}(2n+1)}$.

Problème 3 — Inégalités de convexité

On rappelle que si A est une partie d'un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel E , dire que A est *convexe* signifie que

$$\forall (a_0, a_1) \in A^2, \quad \forall t \in [0, 1], \quad (1-t)a_0 + ta_1 \in A.$$

On fixe un entier $n \geq 2$. On rappelle que l'ensemble des matrices symétriques positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ et que l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille n est noté $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Partie 1 — généralités sur les matrices symétriques définies positives

Question 23. Montrer que l'ensemble $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ est une partie convexe de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Question 24. Pour toute matrice A de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$, montrer qu'il existe une matrice B de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ vérifiant l'égalité $B^2 = A$.

Partie 2 — une première inégalité de convexité

Dans cette partie, on considère une matrice A de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. D'après le théorème spectral, on sait que le polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$ et on introduit sa factorisation

$$\chi_A = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on pose $g_A(t) = \det(I_n + tA)$.

Question 25. Pour tout $t \geq 0$, montrer que $g_A(t) > 0$.

On peut alors définir la fonction $h_A : t \mapsto \ln(g_A(t))$ de $[0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.

Question 26. Montrer que la fonction h_A est concave.

Question 27. En déduire l'inégalité

$$\forall t \geq 0, \quad \ln(\det(I_n + tA)) \leq \operatorname{tr}(A)t.$$

Partie 3 — une deuxième inégalité de convexité

Soient A et C deux matrices de $\mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.

Question 28. Étudier la convexité de la fonction $t \mapsto \ln(t)$.

Question 29. Montrer l'existence d'une matrice D diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et d'une matrice $Q \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = QQ^T \quad \text{et} \quad C = QDQ^T.$$

Justifier de plus que les coefficients diagonaux de D sont strictement positifs.

Indication. Introduire une matrice B comme à la question 24 et vérifier que la matrice $B^{-1}CB^{-1}$ est symétrique.

Question 30. Pour tout $t \in [0, 1]$, démontrer l'inégalité

$$\det((1-t)A + tC) \geq (\det(A))^{1-t}(\det(C))^t.$$

Problème 4

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on définit de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ la fonction

$$f_n : x \mapsto e^{-n} \cos(n^2 x).$$

Question 31. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. Sa somme est notée f .

Question 32. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Question 33. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, justifier la minoration

$$\left| f^{(2k)}(0) \right| \geq e^{-4k} (4k)^{4k}.$$

Question 34. En déduire le rayon de convergence de la série entière $\sum_{k \geq 0} \frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!} x^{2k}$.

Question 35. La fonction f est-elle développable en série entière ?