

PC* 26 - DEVOIR N° 16

corrigé

Thermoacoustique

Propagation du son

A) Modèle classique

Les questions 1 à 6 reproduisent des passages du cours.

7. Pendant un orage, l'apparition d'un éclair s'accompagne d'un coup de tonnerre. Les deux phénomènes sont simultanés mais la lumière émise par l'éclair se propage à la vitesse $c = 3.10^8 \text{ m.s}^{-1}$ alors que le son se propage à la vitesse c_s . Pour un observateur situé à la distance d , les dates de vision de l'éclair et d'audition du tonnerre sont donc

$$t_E = \frac{d}{c} \quad \text{et} \quad T_{\text{bouv}} = \frac{d}{c_s} .$$

Le décalage entre ces deux dates est

$$\Delta t = \frac{d}{c_s} - \frac{d}{c} \simeq \frac{d}{c_s} .$$

Pour estimer d , il suffit donc à l'observateur de compter combien de secondes séparent la vision de l'éclair de l'audition du tonnerre puis de calculer

$$d = c_s \Delta t .$$

Avec $c_s = 340 \text{ m.s}^{-1}$, on obtient d en mètres. En trois secondes, le son parcourt environ un kilomètre. On peut donc aussi prendre Δt en secondes et le diviser par trois : on obtient d en kilomètres.

8. Pour une propagation isotherme, la compressibilité à utiliser n'est plus χ_S mais χ_T . Au lieu d'avoir $P/\rho^\gamma = Cste$, on a d'après l'équation d'état $P/\rho = RT/M = Cste$. En prenant la différentielle logarithmique de cette expression, il vient

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\mu}{\mu_0} = 0 \quad \text{donc} \quad \mu = \frac{\mu_0}{P_0} p .$$

Par rapport au calcul usuel, le facteur γ disparaît et on obtient

$$c_T = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} = 290 \text{ m.s}^{-1} \quad \text{à} \quad T_0 = 293 \text{ K} .$$

9. Les valeurs mesurées valident le modèle adiabatique. Nous avons mesuré c_s une séance de travaux pratiques.

10. Considérons la tranche de fluide de section S et située entre les abscisses x et $x+dx$. Sa capacité calorifique est $\mu_0 S c_v dx$ et, pendant dt , son énergie interne varie de $\mu_0 S c_v dx (T(x, t+dt) - T(x, t)) = \mu_0 c_v dx dt \frac{\partial T}{\partial t}$. Pendant dt , cette tranche reçoit de la part du fluide situé à sa gauche et à sa droite :

- le transfert thermique $S dt (j(x, t) dt - j(x+dx, t))$;
- le travail $\delta W = P(x, t) S v(x, t) dt - P(x+dx, t) S v(x, t) dt$.

Dans cette expression, $P = P_0 + p$ et les termes en pv sont d'ordre 2. À l'ordre 1, on a donc¹

$$\delta W = (v(x, t) - v(x+dx, t)) P_0 S dt .$$

Le premier principe permet d'écrire $dU = \delta W + \delta Q$, c'est à dire

$$\begin{aligned} \mu_0 S c_v dx dt \frac{\partial T}{\partial t} &= P_0 (v(x, t) - v(x+dx, t)) S dt + S dt (j(x, t) dt - j(x+dx, t)) \\ \mu_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} &= -P_0 \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial j}{\partial x} . \end{aligned}$$

D'après la loi de Fourier, $j = -\lambda \partial T / \partial x$ et donc

$$\mu_0 c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - P_0 \frac{\partial v}{\partial x} .$$

1. On remarquera que c'est justement ce terme d'ordre 2 qui constitue le vecteur de Poynting acoustique. Étonnamment, nous n'avons pas parlé en cours de ce terme d'ordre 1, et cela s'explique par de subtiles raisons.

11. Dans la partie A, l'évolution des particules fluides est supposée adiabatique. Ici, elle ne l'est pas puisque ces particules échangent de la chaleur par diffusion thermique. On ne peut donc plus utiliser χ_S . L'évolution n'est pas non plus isotherme et le modèle de la question 8 ne convient pas davantage.

12. L'équation d'état des gaz parfaits s'écrit $P/\rho = RT'/M$ (T' est la température). Par une différentielle logarithmique, on obtient

$$\frac{dP}{P} - \frac{d\rho}{\rho} = \frac{dT'}{T'} \quad (\text{EE}).$$

En évaluant cette relation au point de repos du fluide et en remplaçant les différentielles par de petites variations, on obtient

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T}{T_0} \quad .$$

13. Pour les quatre grandeurs oscillantes p , μ , v et T , on a

$$\frac{\partial \underline{X}}{\partial t} = j\omega \underline{X} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \underline{X}}{\partial x} = -jk \underline{X} \quad .$$

Les équations du problème s'écrivent donc

$$\mu_0 j\omega v = jkp \quad (\text{EL})$$

$$-\mu_0 jkv + j\omega \underline{\mu} = 0 \quad (\text{CL})$$

$$\frac{p}{P_0} - \frac{\mu}{\mu_0} = \frac{T}{T_0} \quad (\text{EE})$$

$$\mu_0 c_v j\omega T = -\lambda k^2 T + P_0 jkv \quad (\text{BE}).$$

Pour obtenir la relation de dispersion, il suffit d'éliminer trois des quatre fonctions inconnues et d'établir une équation portant sur la quatrième. Diverses options sont envisageables pour mener ce calcul et j'ai choisi celle qui conserve la fonction p car c'est celle qu'on manipule habituellement en acoustique.

$$(\text{CL}) \text{ donne } \underline{\mu} = \mu_0 \frac{kv}{\omega} \quad \text{et} \quad (\text{EL}) \text{ donne } \underline{\mu}_0 v = \frac{k}{\omega} p \quad \text{donc} \quad \mu = \frac{k^2}{\omega^2} p \quad .$$

Avec (EE), on obtient

$$\frac{p}{P_0} - \frac{k^2}{\omega^2} \frac{p}{\mu_0} = \frac{T}{T_0} \quad \text{d'où} \quad T = T_0 \left(\frac{1}{P_0} - \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} \right) p \quad .$$

En éliminant T et v au profit de p dans l'équation (BE), on obtient

$$\mu_0 c_v j\omega T_0 \left(\frac{1}{P_0} - \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} \right) p = -\lambda k^2 T_0 \left(\frac{1}{P_0} - \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0} \right) p + P_0 jk \frac{k}{\mu_0 \omega} p$$

La fonction p est non nulle, on peut simplifier par p , puis en multipliant par $\mu_0 \omega^2 / T_0$, on obtient

$$\mu_0 c_v j\omega \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{P_0} - k^2 \right) = -\lambda k^2 \left(\frac{\mu_0 \omega^2}{P_0} - k^2 \right) + \frac{P_0 jk^2 \omega}{T_0}$$

qui se réécrit

$$\lambda k^4 + k^2 \left(-\frac{\lambda \mu_0 \omega^2}{P_0} + j\omega \mu_0 c_v + j\omega \frac{P_0}{T_0} \right) - \frac{\mu_0^2 c_v j\omega^3}{P_0} = 0$$

D'après l'équation d'état, $\mu_0 = MP_0/(RT_0)$ et on parvient à la relation proposée par l'énoncé :

$$\lambda k^4 + k^2 \left(j\omega (\mu_0 c_v + \frac{P_0}{T_0}) - \frac{\lambda M \omega^2}{RT_0} \right) - \frac{j\omega^3 \mu_0 M c_v}{RT_0} = 0 \quad .$$

Cette relation de dispersion présente une forme très inhabituelle est on en rencontre rarement d'aussi compliquées!

14. Pour $\omega \in \mathbb{R}$, la relation de dispersion est satisfaite avec $k \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$. La partie imaginaire de k traduit l'atténuation de l'onde au cours de sa propagation : le milieu est absorbant. De plus, le quotient $v_\varphi = \omega / \text{Re}(k)$ ne sera vraisemblablement pas une constante indépendante de ω ce qui signifie que le milieu est aussi dispersif.

15. La mot « célérité » employé par l'énoncé est ambigu. Il convient ici de distinguer la vitesse de phase $v_\varphi = \omega / \text{Re}(k)$ et la vitesse de groupe (qui concerne le déplacement de paquets d'onde).

16. Considérons tout d'abord le cas limite $\lambda = 0$. On remarque que

$$\mu_0 c_v + \frac{P_0}{T_0} = \mu_0 c_v + \frac{\mu_0 R}{M} = \mu_0 \left(c_v + \frac{R}{M} \right) = \mu_0 c_p \quad .$$

La relation de dispersion se simplifie donc en

$$jk^2 \omega \mu_0 c_p = \frac{j\omega^3 \mu_0 M c_v}{RT_0} \quad \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{\gamma RT_0}{M} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{\gamma RT_0}{M}} \quad .$$

On retrouve la célérité du modèle adiabatique usuel.

Considérons maintenant le cas limite $\lambda \rightarrow \infty$. La relation de dispersion se simplifie en

$$k^4 - \frac{M\omega^2 k^2}{RT_0} = 0 \quad .$$

En excluant le cas $k = 0$, on obtient après simplification par k^2

$$k^2 = \frac{M\omega^2}{RT_0} \quad v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{RT_0}{M}} \quad .$$

On retrouve le résultat du modèle isotherme de la question 8.

17. Dans le cas général, la prise en compte de la conduction thermique conduit à une absorption de l'onde. Une onde acoustique s'accompagne de variations de pression qui agissent comme des forces de rappel élastique permettant la propagation de proche en proche (un peu comme dans une chaîne de ressorts). La diffusion thermique entraîne un échange et induit une tendance entre les zones chaudes et comprimées d'une part et les zones froides et détendues d'autre part. Il en résulte une tendance à l'homogénéisation de la pression ce qui réduit le couplage élastique évoqué plus haut. Ce phénomène est irréversible ; il s'accompagne d'une création d'entropie qu'il serait intéressant d'étudier ...

18. Au niveau du haut-parleur, $P(M, t) = P_0$ donc $p(L, t) = 0$: il s'agit d'un nœud de pression. La cavité est fermée par une cloison et, en l'absence de précision fournie par l'énoncé, nous la supposons rigide : $v(0, t) = 0$.

Les modes propres sont les ondes stationnaires compatibles avec ces conditions de bord. Dans une onde stationnaire, un nœud de vitesse correspond à un ventre de pression (ce qu'on démontre facilement à partir de l'équation d'Euler linéarisée). La pression présente donc un nœud d'un côté et un ventre de l'autre. Un petit dessin montre que

$$L = \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda_n}{2} \quad .$$

On peut aussi trouver cette relation en explicitant $p(x, t)$ et $v(x, t)$, ce que nous ferons un peu plus loin.

19. Comme $\lambda = 4L$, la période de l'onde est

$$\tau = \frac{\lambda}{c} = 4L \sqrt{\frac{M}{\gamma RT_0}} = 1,51 \text{ ms} \quad .$$

20. La pression d'amplitude p_m s'exprime sous la forme

$$p(x, t) = p_m \cos(kx + \varphi) \cos \omega t \quad \text{avec} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{2L} \quad .$$

L'équation d'Euler linéarisée s'écrit

$$\mu_0 \frac{\partial v}{\partial t} = k p_m \sin(kx + \varphi) \cos \omega t \quad v = \frac{p_m}{\mu_0 c} \sin(kx + \varphi) \sin \omega t \quad .$$

Comme $v(L, t) = 0$, $\sin \varphi = 0$ et on peut choisir $\varphi = 0$. La condition de bord $p(L, t)$ est satisfaite grâce au choix de k . Finalement,

$$p(x, t) = p_m \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos \omega t \quad v(x, t) = \frac{p_m}{\mu_0 c} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \sin \omega t \quad v_m = \frac{v_m}{\mu_0 c} \quad .$$

21. En acoustique, on confond D/Dt et $\partial/\partial t$. Le déplacement $\xi(x, t)$ des particules fluides vérifie

$$\frac{\partial x}{\partial t} = v \quad \text{d'où} \quad \xi = -\frac{p_m}{\mu_0 c \omega} \sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos \omega t \quad \text{amplitude :} \quad \xi_m = \frac{p_m}{\mu_0 c \omega} = 2,3 \text{ mm (énorme!).}$$

Pour trouver la température, on utilise la loi de Laplace sous la forme $P^{1-\gamma} T^\gamma = Cste$, dont la différentielle logarithmique s'écrit

$$(1-\gamma) \frac{p}{P_0} + \gamma \frac{T}{T_0} = 0 \quad T = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{T_0}{P_0} p = \frac{2}{7} \frac{T_0}{P_0} p \quad T(x, t) = T_m \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos \omega t \quad \text{avec} \quad T_m = \frac{2}{7} \frac{T_0}{P_0} p_m = 0,86 \text{ K}.$$

On remarque que p et T sont en phase : une température élevée coïncide avec une pression élevée. Par contre, à cause signe moins dans l'expression de ξ , cet état de haute énergie peut, selon le signe de $\sin\left(\frac{\pi x}{2L}\right)$, correspondre à une position où la particule fluide est déplacée vers la gauche ou vers la droite. Dans la suite, ce facteur en sinus sera positif.

22. On utilise l'expression de ξ qu'on évalue en $x = L/2 + x'_0$. Il apparaît le facteur

$$\sin\left(\frac{\pi(L/2 + x'_0)}{2L}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi x'_0}{2L}\right)$$

Comme $0 \leq x'_0 \leq d$,

$$0 \leq \frac{\pi x'_0}{2L} \leq \frac{\pi d}{2L} \ll \frac{\pi}{2}.$$

On peut donc négliger le terme $\pi x'_0/(2L)$ et écrire

$$\xi(x'_0, t) \simeq -\xi_m \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cos \omega t = -\xi'_m \cos \omega t \quad \text{avec} \quad \xi'_m = \frac{\xi_m}{\sqrt{2}}.$$

Avec cette approximation, les particules fluides sont animées du même déplacement tout le long de la lamelle. La même approximation dans le champ de température conduit à

$$T = T'_m \cos \omega t \quad \text{avec} \quad T'_m = \frac{T_m}{\sqrt{2}} \quad \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Lorsqu'une particule fluide passe de la position la plus à gauche à sa position la plus à droite, $\cos \omega t$ varie de 1 à -1, ξ passe de $-\xi'_m$ à $+\xi'_m$ et T passe de T'_m à $-T'_m$: la température varie donc de $-2T'_m$, elle diminue.

23. (a) À $t = 0$, la particule fluide se trouve à l'abscisse $x'_0 - \xi'_m$ et elle prend la température du métal en ce point :

$$T_1 = T_c + \frac{(T_F - T_c)(x'_0 - \xi'_m)}{d}.$$

(b) Pendant ce mouvement, la température varie de $-2T'_m$ donc

$$T_2 = T_1 - 2T'_m.$$

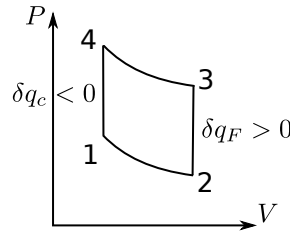
(c) Parvenue à la position $x'_0 + \xi'_m$, la particule fluide prend la température du métal en ce point :

$$T_3 = T_c + \frac{(T_F - T_c)(x'_0 + \xi'_m)}{d}.$$

(d) Dans le déplacement vers la gauche, la température augmente de $2T'_m$:

$$T_4 = T_3 + 2T'_m.$$

(e) Ce cycle frigorifique est décrit dans le sens trigonométrique ; il est constitué de deux isochores (au contact du métal) et de deux adiabatiques réversibles. Quand le fluide entre en contact avec le métal du côté froid (vers la droite), il est plus froid que ce métal et capte $\delta q_F > 0$. Quand il entre en contact avec le métal du côté chaud (vers la gauche), il est plus chaud que ce métal et reçoit $\delta q_c > 0$.



La masse de fluide est $\mu_0 S dx$ et sa capacité calorifique $\mu_0 S c_v dx$. Les transferts thermiques lors des contacts avec le métal sont donc

$$\delta q_F = \mu_0 S c_v dx (T_3 - T_2) = \mu_0 S c_v dx (T_3 - T_1 + 2T'_m) = \mu_0 S c_v dx \left(\frac{(T_F - T_c) \times 2\xi'_m}{d} + 2T'_m \right) .$$

$$\delta q_c = \mu_0 S c_v dx (T_1 - T_4) = \mu_0 S c_v dx (T_1 - T_3 - 2T'_m) = -\delta q_F$$

- (f) Le fonctionnement frigorifique exige $\delta q_F > 0$, c'est à dire

$$\frac{(T_F - T_c) \times 2\xi'_m}{d} + 2T'_m > 0 .$$

En utilisant les expressions de ξ'_m et T'_m , on en déduit

$$T_c - T_F < \frac{2}{7} d \frac{T_0}{P_0} \mu_0 c \omega \quad \text{avec} \quad \omega = 2\pi f = 2\pi \frac{c}{4L} = \frac{c\pi}{2L} \quad \text{et} \quad \frac{T_0 \mu_0}{P_0} = \frac{M}{R}$$

$$T_c - T_F < \frac{2}{7} d \frac{M}{R} \frac{c^2 \pi}{2L} = \frac{d}{7L} \gamma \pi T_0 \quad \boxed{T_C - T_F < \frac{\pi d T_0}{5L} = \frac{(\gamma - 1) d T_0}{2L}} .$$

Le déplacement des particules par l'onde acoustique s'accompagne de variations de températures qui permettent au fluide d'arriver plus chaud que le métal du côté chaud, et plus froid que le métal du côté froid. Cela n'est possible que si l'écart entre les parties chaudes et froides du métal n'est pas trop fort, et/sou si l'onde acoustique procure une variation de température suffisante.

- (g) La situation me paraît assez confuse ! On évalue δq_F en remplaçant dx par ξ'_m :

$$Q_F = \mu_0 S c_v \xi'_m \left(\frac{(T_F - T_c) \times 2\xi'_m}{d} + 2T'_m \right)$$

Numériquement, j'obtiens $\xi'_m = 1,6 \text{ mm}$, $T'_m = 0,61 \text{ K}$, $Q_F = 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ J}$. Ce transfert thermique a été réalisé en une période de l'onde donc la puissance est

$$P_F = f Q_F = 5,0 \text{ W} .$$

La fréquence est donnée par $f = c/\lambda = c/(4L)$. Je n'ai pas tenu compte des lamelles ! Toute la section du tuyau n'est en réalité pas exploitée !

- (h) D'après les théorèmes de Carnot, l'efficacité maximale s'obtient en fonctionnement réversible. Pour cela, il faut que l'écart de température entre le fluide et les sources de chaleur avec lesquelles les échanges ont lieu tende vers 0. Mais alors le fonctionnement est infiniment lent et la puissance tend vers 0. Dans le cas du réfrigérateur thermoacoustique, cela correspond à $T_2 - T_3 \rightarrow 0$ et $T_4 - T_1 \rightarrow 0$, d'où on tire

$$2T'_m + \frac{(T_F - T_c) \times 2\xi'_m}{d} \rightarrow 0 .$$

C'est le cas si $T'_m \rightarrow 0$ et si $\xi'_m \rightarrow 0$, mais alors il n'y a plus d'onde acoustique et le réfrigérateur ne fonctionne plus !

Remarque

Le modèle proposé ici ne me paraît pas satisfaisant. On a obtenu $\delta q_F = -\delta q_c$ ce qui conduirait, avec le premier principe, à $\delta W = 0$. On pourrait refroidir sans consommer de travail, ce qui est contradictoire avec le second principe ! L'inégalité de Clausius implique $|\delta q_c| > \delta q_F$, elle est ici violée. L'origine de cette difficulté me semble la suivante. On a supposé que la même variation de température se produit, au signe près, de l'état 1 vers l'état 2 et de l'état 3 vers l'état 4. Mais ce n'est pas en accord avec la loi de Laplace $P^{(1-\gamma)} T^\gamma = C \text{ste}$ en partant de points de départ distincts. Dans la question 21, on a linéarisé cette loi de Laplace au voisinage de (P_0, T_0) , mais en réalité le transfert dans un sens ne se fait pas exactement au voisinage du même point que le trajet retour. On a négligé des termes d'ordre deux qui seraient en déterminants.

24. Dans les expressions de T'_m et ξ'_m , il convient de remplacer $\sin(\pi/4)$ par $\sin Z$ avec $Z = \pi L_1/(2L)$:

$$\xi'_m = \xi_m \sin Z = \frac{p_m}{\mu_0 c \omega} \quad T'_m = T_m \cos Z = \frac{2}{7} \frac{T_0}{P_0} \cos Z \quad .$$

Ainsi, Q_F est proportionnel à

$$\sin Z \left(\frac{(T_F - T_c)}{d \mu_0 c \omega} \sin Z + \frac{2}{7} \frac{T_0}{P_0} \cos Z \right) \quad .$$

On cherche un extremum de la fonction $Z \mapsto \sin Z(a \sin Z + b \cos Z)$. Sa dérivée s'annule pour $\tan 2Z = -b/a$ ce qui conduit ici conduit à $Z = 0,54$ donc $L_1 = 2LZ/\pi = 17 \text{ cm}$. Précédemment, on avait utilisé $Z = L/2 = 25 \text{ cm}$.

25. Le coefficient de diffusion thermique du métal est $D_M = \Lambda_M/(\rho_M C_M)$. À la période $\tau = 2\pi/\omega$, on peut associer la longueur de diffusion

$$\delta_M = \sqrt{D_M \tau} = \sqrt{\frac{2\pi \Lambda_M}{\rho_M C_M \omega}} = 0,4 \text{ mm}.$$

Elle s'interprète comme une épaisseur de peau thermique.

26. On introduit de même

$$\delta_G = \sqrt{\frac{2\pi \Lambda_G}{\mu_0 c_v \omega}} = 0,6 \text{ mm}.$$

27. On souhaite que la chaleur diffuse profondément dans le gaz. Pour cela, il faut éviter de prendre a_1 bien supérieur à δ_G . Mais si a_1 est trop petit, l'onde acoustique sera très perturbée. Je choisis donc $a_1 = \delta_G$.

28. Le métal a été traité comme un thermostat donc sa capacité calorifique doit être très supérieure à celle du gaz :

$$\mu_0 c_v a_1 \ll \mu_m c_m a_2 \quad a_2 \gg \frac{\mu_0 c_v}{\mu_m c_m} a_1 = 8.10^{-4} a_1 \quad .$$

Avec la valeur de a_1 précédente, $a_2 \gg 0,5 \mu\text{m}$. Mais a_2 doit aussi rester petit devant a_1 pour ne pas trop perturber l'onde acoustique (cf début de B). Je propose $a_2 = 50 \mu\text{m}$.

On vérifie que a_2 est très inférieur à δ_M , ce qui permet à la diffusion de se faire dans la profondeur du métal.

29. J'abandonne!

Ondes de spin

1. Démonstration vue en cours.

$$\gamma_{th} = \frac{e}{2m} \quad \gamma_{th} = 8,79.10^{10} \text{ C.kg}^{-1}.$$

2. Le moment cinétique L a pour dimension ML^2T^{-1} comme la constante de Planck ; c'est une « action » au sens de la mécanique quantique. Comme c'est une grandeur quantifiée, elle est de l'ordre de grandeur de $\hbar$. On a aussi vu en cours que le moment cinétique est un multiple de $\hbar$.

$$|M| = \gamma L \simeq \frac{e\hbar}{2m} = \mu_B = 9,3.10^{-24} \text{ A.m}^{-2}$$

3. Cette question a été réduite dans la piste noire.

a) On applique le TMC en O à l'atome qui n'est soumis qu'au moment des forces magnétiques :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}_0 \quad \frac{d\vec{M}}{dt} = -\gamma \vec{M} \wedge \vec{B}_0 \quad . \quad (1)$$

b) En projetant l'équation précédente sur $\vec{u}_z$, on obtient :

$$\frac{dM_z}{dt} = -\gamma(\vec{M} \wedge B_0 \vec{u}_z) \cdot \vec{u}_z = 0$$

donc M_z est constant dans le temps. En faisant le produit scalaire de l'équation du mouvement avec $\vec{M}$ on obtient

$$\begin{aligned} \vec{M} \cdot \frac{d\vec{M}}{dt} &= -\gamma(\vec{M} \wedge \vec{B}_0) \cdot \vec{M} = 0 \\ \frac{1}{2} \frac{dM^2}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

donc M^2 et $|\vec{M}|$ sont constants dans le temps.

c) En projetant l'équation 1 sur $\vec{u}_x$ et $\vec{u}_y$ on obtient

$$\begin{cases} \frac{dM_x}{dt} = -\gamma B_0 M_y \\ \frac{dM_y}{dt} = +\gamma B_0 M_x \end{cases}$$

Pour résoudre ces équations différentielles couplées, le plus rapide est de passer en notation complexe en introduisant $\underline{M} = M_x + jM_y$. En combinant les deux relations différentielles, on obtient

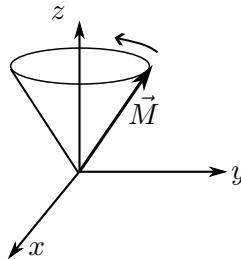
$$\frac{d\underline{M}}{dt} = -\gamma B_0 M_y + j\gamma B_0 M_x = j\gamma B_0 (M_x + jM_y) \quad \frac{d\underline{M}}{dt} = j\gamma B_0 \underline{M} \quad .$$

Cette équation se résout en $\underline{M} = \underline{M}_0 e^{j\omega_L t}$ avec $\omega_L = \gamma B_0$. On pose $\underline{M}_0 = M_0 e^{j\varphi}$ puis on sépare la partie réelle et la partie imaginaire pour obtenir

$$M_x = M_0 \cos(\omega_L t) \quad M_y = M_0 \sin(\omega_L t) \quad .$$

d) Le vecteur $\vec{M}$ tourne sur un cône à la pulsation ω_L . La fréquence de rotation est

$$f_L = \frac{\omega_L}{2\pi} = 1,4 \cdot 10^9 \text{ Hz} \quad .$$



4. Dans le cas d'un dipôle plongé dans un champ extérieur, l'énergie potentielle s'exprime sous la forme $\mathcal{E}_p = -\vec{M} \cdot \vec{B}$ et le couple par $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}$. Pour le dipôle 1, l'énergie a ici la même forme en remplaçant $\vec{B}$ par $\alpha \vec{M}_2$, donc il subit le couple $\vec{\Gamma}_1 = \vec{M}_1 \wedge \alpha \vec{M}_2$. Symétriquement, ou d'après le principe des actions réciproques, le dipôle 2 subit le couple $\vec{\Gamma}_2 = \vec{M}_2 \wedge \alpha \vec{M}_1$.

5. L'équilibre stable est obtenu lorsque l'énergie potentielle du système est minimale, c'est à dire lorsque toutes les énergies d'interactions en $-\alpha \vec{M}_n \cdot \vec{M}_{n+1}$ le sont. Or cette quantité est minimale quand $\vec{M}_n$ et $\vec{M}_{n+1}$ sont parallèles et de même sens. Le moment magnétique de chaque atome a même orientation que celui de ses voisins, ils sont tous « alignés ».

6. Le dipôle $\vec{M}_n$ subit des actions de la part de ses deux voisins : $\vec{\Gamma}_{n-1/n} = \alpha \vec{M}_n \wedge \vec{M}_{n-1}$ et $\vec{\Gamma}_{n+1/n} = \alpha \vec{M}_n \wedge \vec{M}_{n+1}$. Au total il est soumis à $\vec{\Gamma}_n = \alpha \vec{M}_n \wedge (\vec{M}_{n-1} + \vec{M}_{n+1})$. Le résultat de la question 1 et le théorème du moment cinétique fournissent

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{M}_n}{dt} &= -\gamma \frac{d\vec{L}_n}{dt} = -\gamma \vec{\Gamma}_n \\ \frac{d\vec{M}_n}{dt} &= -\gamma \alpha \vec{M}_n \wedge (\vec{M}_{n-1} + \vec{M}_{n+1}) \end{aligned}$$

7. En effectuant les produits vectoriels on obtient

$$\begin{cases} \frac{dM_{nx}}{dt} = \alpha\gamma(M_{n+1y} + M_{n-1y})M_{nz} - \alpha\gamma(M_{n+1z} + M_{n-1z})M_{ny} \\ \frac{dM_{ny}}{dt} = \alpha\gamma(M_{n+1z} + M_{n-1z})M_{nx} - \alpha\gamma(M_{n+1x} + M_{n-1x})M_{nz} \\ \frac{dM_{nz}}{dt} = \alpha\gamma(M_{n+1x} + M_{n-1x})M_{ny} - \alpha\gamma(M_{n+1y} + M_{n-1y})M_{nx} \end{cases}$$

8. Comme dans la question 3, on démontre que $\|\vec{M}_n\|$ reste constant, égale à M_0 . Or

$$M_0 = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = M_z \sqrt{1 + \frac{M_x^2 + M_y^2}{M_z^2}} \simeq \left(M_0 + \frac{1}{2} \frac{M_x^2 + M_y^2}{M_z^2}\right) .$$

En négligeant les termes d'ordre supérieur ou égal à 2, on a $M_0 \simeq M_z$. La projection M_z reste donc constante. Ce résultat est cohérent avec l'expression de $\frac{dM_{nz}}{dt}$ donnée en réponse à la question précédente : dans le membre de droite, les produits $(M_{n+1x} + M_{n-1x})M_{ny}$ et $(M_{n+1y} + M_{n-1y})M_{nx}$ sont du second ordre : on peut négliger les variations de M_{nz} . En remplaçant M_{nz} par M_0 on obtient

$$\begin{cases} \frac{dM_{nx}}{dt} = +\alpha\gamma M_0(M_{n+1y} + M_{n-1y} - 2M_{ny}) \\ \frac{dM_{ny}}{dt} = -\alpha\gamma M_0(M_{n+1x} + M_{n-1x} - 2M_{nx}) \end{cases}$$

9. En passant à la limite continue, et selon un développement de Taylor d'ordre 2 vu en cours, $M_{n+1y} + M_{n-1y} - 2M_{ny} \simeq a^2 \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2}$ et $M_{n+1x} + M_{n-1x} - 2M_{nx} \simeq a^2 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2}$. D'où les équations d'onde couplées :

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial t} = \alpha\gamma a^2 M_0 \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} \\ \frac{\partial M_y}{\partial t} = -\alpha\gamma a^2 M_0 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} \end{cases}$$

Il s'agit ici d'équations aux dérivées partielles couplées, mais pas de l'équation de d'Alembert. Même en les découplant, on n'obtient pas l'équation de d'Alembert.

10. La forme proposée correspond à une onde progressive harmonique de déplaçant vers les x croissants. En substituant ces expressions de M_x et M_y dans le système couplé précédent on obtient

$$\begin{cases} -j\omega A_x = -\alpha\gamma M_0 a^2 k^2 A_y \\ -j\omega A_y = +\alpha\gamma M_0 a^2 k^2 A_x \end{cases}$$

On élimine A_x et A_y par produit membre à membre pour trouver la relation

$$\omega^2 = (\alpha\gamma M_0 a^2 k^2)^2 \quad \text{ou} \quad \omega = \alpha\gamma M_0 a^2 k^2$$

11. L'une quelconque des deux équations donne $A_y = jA_x$. En notation complexe, $M_x = A_0 \exp[j(kx - \omega t)]$ et $M_y = jA_0 \exp[j(kx - \omega t)]$. En notation réelle

$$M_{nx} = A_0 \cos(kx_n - \omega t) = A_0 \cos(\omega t - kx_n) \quad M_{ny} = -A_0 \sin(kx_n - \omega t) = A_0 \sin(\omega t - kx_n)$$

12. La projection de $\vec{M}(x_n, t)$ dans le plan xy tourne dans le sens direct autour de $\vec{e}_z$. Comme $M_z(x_n, t)$ reste constant, le vecteur $\vec{M}(x_n, t)$ tourne sur un cône d'axe $\vec{e}_z$. Le mouvement est donc très similaire à celui de la question 3, à ceci près qu'ici, la pulsation ω est celle de l'onde alors qu'avant, elle était déterminée par le champ B_0 . Pour passer de $\vec{M}_n$ à $\vec{M}_{n+1}$ on remplace x_n par $x_n + a$.

$$M_{n+1x} = A_0 \cos(\omega t - kx_n - ka) \quad M_{n+1y} = -A_0 \sin(\omega t - kx_n - ka)$$

Le vecteur $\vec{M}_{n+1}$ tourne donc avec un retard angulaire de ka sur le précédent.

13. a) $M_x(x, t) = A_x \exp[j(kx - \omega t)] + A'_x \exp[j(-kx - \omega t)]$. L'annulation de M_x en $x = 0$ s'écrit $A_x + A'_x = 0$ soit $A'_x = -A_x$. Alors $M_x(x, t) = 2jA_x \sin(kx) \exp(-j\omega t)$. En posant $A_x = A_0 \in \mathbb{R}$, on obtient en notation réelle

$$M_x = A_0 \sin(kx) \sin \omega t$$

ce qui décrit une onde stationnaire.

b) L'annulation de M_x en $x = \ell$ s'écrit alors $\sin(k\ell) = 0$ d'où $k_m = m\pi/\ell$.

14. Dans le membre de droite du théorème du moment cinétique utilisé à la question 6, il faut ajouter le moment $\vec{M}_n \wedge \vec{B}_0$ exercé par le champ $\vec{B}_0$.

$$\frac{d\vec{M}_n}{dt} = -\gamma\alpha\vec{M}_n \wedge (\vec{M}_{n-1} + \vec{M}_{n+1}) - \gamma\vec{M}_n \wedge \vec{B}_0$$

Avec l'approximation $M_z \simeq M_0$, on obtient en projection

$$\begin{cases} \frac{dM_{nx}}{dt} = +\alpha\gamma M_0(M_{n+1y} + M_{n-1y} - 2M_{ny}) - \gamma B_0 M_{ny} \\ \frac{dM_{ny}}{dt} = -\alpha\gamma M_0(M_{n+1x} + M_{n-1x} - 2M_{nx}) + \gamma B_0 M_{nx} \end{cases}$$

15. Le passage à la limite continue donne

$$\begin{cases} \frac{\partial M_x}{\partial t} = \alpha\gamma M_0 \frac{\partial^2 M_y}{\partial x^2} - \gamma B_0 M_x \\ \frac{\partial M_y}{\partial t} = -\alpha\gamma M_0 \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \gamma B_0 M_y \end{cases}$$

Un calcul analogue à celui effectué plus haut fournit la relation

$$\omega = \gamma B_0 + \alpha\gamma M_0 k^2 a^2 \quad .$$

16. Pour $k_m = m\pi/\ell$ on obtient $\omega_m = \gamma B_0 + \alpha\gamma M_0 \left(\frac{m\pi a}{\ell}\right)^2$

17. Il s'agit d'un phénomène de résonance qui apparaît lorsque la pulsation d'excitation se confond avec celle d'un des modes propres.

18. La pulsation d'excitation Ω est donnée. Lorsque B_0 augmente à partir de 0, chacune des pulsations propres ω_m croît à partir de $\omega_{m0} = \alpha\gamma M_0 \left(\frac{m\pi a}{\ell}\right)^2$ o. En augmentant, certaines de ces pulsations vont atteindre Ω ce qui provoquera la résonance. Mais les pulsations qui étaient déjà plus élevées que Ω lorsque $B_0 = 0$ ne rencontreront jamais Ω . Seules les pulsations telles que $\omega_{m0} < \Omega$ peuvent entrer en résonance, ce qui limite le nombre de valeurs de m possibles. L'expérience montre qu'il n'y en a que trois. Elles sont associées aux plus petites valeurs de ω_{m0} : $m = 1$, $m = 3$ et $m = 5$. Quand B_0 augmente, la première qui atteint Ω est ω_5 , puis viennent ω_3 et ω_1 .

B_0 (T)	0,09	0,43	0,60
m	5	3	1

19.

$$\begin{cases} \Omega = \gamma \left[B_{05} + M_0 \alpha \left(\frac{5\pi a}{\ell} \right)^2 \right] \\ \Omega = \gamma \left[B_{03} + M_0 \alpha \left(\frac{3\pi a}{\ell} \right)^2 \right] \\ \Omega = \gamma \left[B_{01} + M_0 \alpha \left(\frac{1\pi a}{\ell} \right)^2 \right] \end{cases}$$

On en déduit

$$\alpha M_0 = \frac{B_{01} - B_{03}}{(3^2 - 1^2) \left(\frac{\pi a}{\ell} \right)^2} = 345 \text{ T}$$

L'application numérique avec B_{03} et B_{05} conduit à la même valeur. Enfin

$$\gamma = \frac{\Omega}{B_{01} + M_0 \alpha \left(\frac{\pi a}{\ell} \right)^2} = 1,77 \cdot 10^{11} \text{ C.kg}^{-1}. \quad \text{facteur de Landé} \quad \gamma = 2,0 \quad .$$