

Exercice 1. On se donne un espace vectoriel réel E de dimension finie. On note n sa dimension.

On considère un endomorphisme f de E et on suppose que E est nilpotent, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que f^k soit l'endomorphisme nul de E . On note p l'indice de nilpotence de f , c'est-à-dire le plus petit des entiers k pour lesquels f^k est l'endomorphisme nul de E .

1. Prouver les inégalités suivantes

$$0 \leq \operatorname{rg}(f^{p-1}) \leq \dots \leq \operatorname{rg}(f^2) \leq \operatorname{rg}(f) \leq n.$$

2. Pour tout entier naturel k , prouver l'égalité $\dim(\operatorname{Ker}(f) \cap \operatorname{Im}(f^k)) = \operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1})$ en utilisant la restriction de f à $\operatorname{Im}(f^k)$.

En déduire que la suite de terme général $\operatorname{rg}(f^k) - \operatorname{rg}(f^{k+1})$ est décroissante.

En déduire que les inégalités écrites à la première question sont strictes.

Pour tout le reste de l'exercice, on suppose que n vaut 5 et que p vaut 3.

3. Montrer que le rang de f^2 vaut 1 et que le rang de f vaut 2 ou 3.

4. Dans cette question, on suppose que le rang de f vaut 2.

a. Montrer qu'il existe des vecteurs e_3, e_4, e_5 de E tels que la famille $(f^2(e_3), e_4, e_5)$ soit une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

b. On pose $e_2 = f(e_3)$ et $e_1 = f(e_2)$.

Montrer que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de E et donner la matrice de f dans cette base.

5. Dans cette question, on suppose que le rang de f vaut 3.

a. Calculer $\dim(\operatorname{Im}(f) \cap \operatorname{Ker}(f))$ et $\dim(\operatorname{Im}(f^2) \cap \operatorname{Ker}(f))$.

b. En déduire les inclusions $\operatorname{Im}(f^2) \subset \operatorname{Ker}(f) \subset \operatorname{Im}(f)$.

c. On choisit un vecteur e_3 de E qui n'appartient pas à $\operatorname{Ker}(f^2)$. On pose ensuite $e_2 = f(e_3)$ et $e_1 = f(e_2)$.

Montrer l'existence d'un vecteur e_5 de E tel que le couple $(e_1, f(e_5))$ soit une base de $\operatorname{Ker}(f)$.

On pose alors $e_4 = f(e_5)$.

d. Montrer finalement que la famille $(e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$ est une base de E et donner la matrice représentative de f dans cette base.

Exercice 2. On fixe a et b dans \mathbb{R} et on les suppose distincts. On introduit le polynôme

$$P = (X - a)^2(X - b).$$

On considère un espace vectoriel réel E et un endomorphisme f de E .

Le but de cet exercice est de montrer l'égalité

$$\operatorname{Ker}(P(f)) = \operatorname{Ker}((f - a\operatorname{Id}_E)^2) \oplus \operatorname{Ker}(f - b\operatorname{Id}_E)$$

et d'appliquer ce résultat dans deux cadres familiers.

1. Trouver $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$ vérifiant l'égalité polynomiale suivante

$$\lambda(X - a)^2 + \mu(X - a)(X - b) + \nu(X - b) = 1.$$

2. Montrer que les sous-espaces vectoriels de E définis par

$$F = \operatorname{Ker}((f - a\operatorname{Id}_E)^2) \quad G = \operatorname{Ker}(f - b\operatorname{Id}_E)$$

sont en somme directe.

3. Montrer ensuite l'égalité annoncée.

4. Résoudre l'équation différentielle

$$y''' - 3y' + 2y = 0$$

d'inconnue $y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Trouver toutes les suites réelles $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+3} + 2u_{n+2} - 4u_{n+1} - 8u_n = 0.$$

Exercice 3. Produit de Kronecker

On fixe deux entiers n et p supérieurs ou égaux à 2 et on note \mathbb{K} un corps égal à \mathbb{R} ou à \mathbb{C} .

Si M est une matrice, on note $m_{i,j}$ ses coefficients et $C_j(M)$ ses colonnes.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ sont deux matrices, le *produit de Kronecker* $A \otimes B$ est la matrice de $\mathcal{M}_{nq,pr}(\mathbb{K})$ dont une représentation par blocs est

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{1,1}B & a_{1,2}B & \cdots & a_{1,p}B \\ a_{2,1}B & a_{2,2}B & \cdots & a_{2,p}B \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n,1}B & a_{n,2}B & \cdots & a_{n,p}B \end{pmatrix}.$$

Par exemple, pour $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, on trouve $A \otimes B = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$

Enfin, pour tout $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $J_n(r)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, qui valent 1.

1. Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$. Montrer que $A \otimes B$ est nulle si, et seulement si, A ou B est nulle.

2. a. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $Y \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité

$$(A \otimes B) \cdot (X \otimes Y) = (A \cdot X) \otimes (B \cdot Y).$$

b. Soient A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soient B et B' dans $\mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité

$$(A \otimes B) \cdot (A' \otimes B') = (A \cdot A') \otimes (B \cdot B').$$

3. a. Soient $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \text{GL}_p(\mathbb{K})$. Montrer que $A \otimes B$ est inversible, et préciser son inverse.

b. Montrer que la matrice $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et calculer son inverse.

4. a. Soient $r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ et $s \in \llbracket 1, p \rrbracket$. Montrer que la matrice $J_n(r) \otimes J_p(s)$ est de rang rs .

b. Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité $\text{rg}(A \otimes B) = \text{rg}(A) \text{rg}(B)$.

c. En déduire que $A \otimes B$ est inversible si, et seulement si, A et B le sont.

5. Soient $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$. Montrer l'égalité $\det(A \otimes B) = (\det(A))^p (\det(B))^2$.

On commencera par le cas où A est triangulaire inférieure.