

Chapitre 16 — fonctions à valeurs vectorielles

Dans ce chapitre, on se donne un espace vectoriel réel E de dimension finie et une fonction f définie sur un intervalle I , à valeurs dans E .

1 Continuité

Rappel : la continuité de f équivaut à celle de ses composantes relativement à une base de E .

2 Dérivabilité

Définition. Propriété : ça équivaut à la dérivabilité de ses composantes relativement à une base de E .

Vecteur vitesse, vecteur accélération.

Fonctions de classe \mathcal{C}^k , de classe \mathcal{C}^∞ .

3 Règles de calcul sur la dérivabilité

Si L est une application linéaire de E vers un espace vectoriel F , dérivation de $L \circ f$.

Si φ est une fonction à valeurs réelles d'une variable réelle, dérivation de $f \circ \varphi$.

Si B est une application bilinéaire sur E , à valeurs dans un espace vectoriel F , dérivation de $t \mapsto B(f(t), g(t))$. Cas particulier du produit scalaire.

Si M est une application p -linéaire sur $E_1 \times \dots \times E_p$, dérivation de $t \mapsto M(f_1(t), \dots, f_p(t))$. Cas particulier du déterminant.

Exercice 1. (*) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On définit la fonction $\varphi_M : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par $\varphi_M(t) = \det(I_n + tM)$.

Justifier que φ_M est de classe \mathcal{C}^∞ et calculer $\varphi_M'(0)$.

Exercice 2. (*) Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit la fonction

$$f : x \mapsto \begin{vmatrix} x + a_1 & x & \cdots & x \\ x & x + a_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & x \\ x & \cdots & x & x + a_n \end{vmatrix}.$$

Exprimer la fonction f' puis la fonction f .

Exercice 3. ()** Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction

$$f_n : t \mapsto \begin{vmatrix} t & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ t^2/2! & t & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ t^n/n! & \cdots & \cdots & t^2/2! & t \end{vmatrix}$$

de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Exprimer la fonction f' puis la fonction f .

Exercice 4. (*) Soit $M \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{M}_{2n+1}(\mathbb{R}))$. On suppose que M est à valeurs dans $\mathcal{O}_{2n+1}(\mathbb{R})$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, la matrice $M'(t)$ n'est pas inversible.