

Chapitre 16 — fonctions de plusieurs variables

1 Retour sur la continuité des fonctions

1.1 Quelques exemples de limites

Chacune des fonctions suivantes est définie et continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. On étudie l'existence d'une limite en l'origine.

$$f : (x, y) \mapsto \frac{x^3}{x^2 + y^2} \quad g : (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad h : (x, y) \mapsto \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad i : (x, y) \mapsto \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$$

1.2 Propriétés topologiques

Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Soit f une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$. Pour tout α réel, l'ensemble

$$\{x \in E ; f(x) < \alpha\}$$

est ouvert et les ensembles

$$\{x \in E ; f(x) \leq \alpha\} \quad \text{et} \quad \{x \in E ; f(x) = \alpha\}$$

sont fermés.

Exemples : si E est de dimension finie, alors tout sous-espace vectoriel de E est fermé dans E ; si E est un espace préhilbertien, alors tout sous-espace vectoriel de E de dimension finie est fermé dans E .

1.3 Théorème des bornes atteintes

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Soit K une partie non vide, fermée et bornée de E . Soit $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

La fonction f possède alors un maximum et un minimum sur K .

Exemple : la fonction $x \mapsto (x|f(x))$ admet un maximum et un minimum sur la sphère unité d'un espace euclidien.

2 Dérivation

2.1 Dérivées partielles

Dérivée d'une fonction en un point selon un vecteur. Notation $D_v f(a)$.

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point d'une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, à valeurs réelles.

Notations $\partial_i f(a)$ et $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$.

2.2 Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$

Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$: en tout point, la fonction admet des dérivées partielles d'ordre 1 selon toutes les coordonnées et les fonctions $\partial_i f$ sont toutes continues sur U . Gradient.

Stabilité par combinaison linéaire, par produit.

Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U et g est une fonction d'une variable de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle qui contient $f(U)$, alors la fonction $g \circ f$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur U .

Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique. Unicité du développement limité.

La classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U implique la continuité.

2.3 Différentielle

La différentielle de f au point a est la forme linéaire

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{i=1}^p h_i \times \partial_i f(a) = (\nabla f(a)|h).$$

Le nombre $df(a)(h)$ est aussi noté $df(a) \cdot h$.

Dérivée directionnelle.

2.4 Règle de la chaîne

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit γ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle I , à valeurs dans U . La fonction $f \circ \gamma$ est alors de classe $\mathcal{C}^1$ sur I , de dérivée

$$t \mapsto df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = ((\nabla f)(\gamma(t)) | \gamma'(t)) = \sum_{i=1}^p \partial_i f(\gamma(t)) \gamma'_i(t).$$

Dérivation de fonctions de la forme $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$.

Cas des coordonnées polaires. Expression du gradient en coordonnées polaires.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert convexe U . La fonction f est constante sur U si et seulement si son gradient est identiquement nul sur U .

2.5 Dérivées partielles d'ordre deux

Définition. Notations $\partial_{i,j}^2 f$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$.

Fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Théorème de Schwarz.

Contre-exemple en l'absence de la classe $\mathcal{C}^2$: la fonction f définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} y^2 \sin(x/y) & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0. \end{cases}$$

Expression du laplacien en coordonnées polaires.

Matrice hessienne de la fonction f en un point a , notée $H_f(a)$. C'est une matrice symétrique par le théorème de Schwarz.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2

$$f(a + h) = f(a) + (\nabla f(a) | h) + \frac{1}{2} (h | H_f(a) h) + o_{h \rightarrow 0}(h^2).$$

3 Extremums

Extremum global, extremum local.

Existence d'un extremum global d'une fonction continue sur un fermé borné.

Point critique.

Si une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^p$ possède un extremum local en un point, alors celui-ci est un point critique.

Minimisation des fonctions de la forme $(a, b) \mapsto \|\vec{y} - a\vec{x} - b\vec{n}\|^2$. Régression linéaire.

Utilisation des coordonnées polaires : extremums de $f : (x, y) \mapsto (3x+4y)e^{-x^2-y^2}$ et de $g : (x, y) \mapsto (x^2-y^2)e^{-x^2-y^2}$.

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$. Soit a un point critique de f dans U .

- Si la matrice $H_f(a)$ est définie positive, alors la fonction f admet en a un minimum local strict.
- Si la matrice $H_f(a)$ n'est pas positive, alors la fonction f n'admet pas en a un minimum local (ni global).

Cas $p = 2$: le déterminant et la trace de $H_f(a)$ donnent directement le signe des valeurs propres.

Exemple de la fonction $f : (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ dans le cas $p = 3$.