

Régularité des fonctions

Exercice 1. (*) On pose $f(x, y) = 0$ si $y = 0$ et $f(x, y) = y + x \sin\left(\frac{1}{y}\right)$ sinon.

Montrer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$ existent mais pas $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y)$.

Exercice 2. (*) On pose $f(x, y) = (x^2 - y^2) \ln(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et $f(0, 0) = 0$.

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}^2$. Est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 3. (*) On pose $f(x, y) = \frac{x^4 y}{x^4 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$. La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?

Exercice 4. ()** Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $q(x, y) = \frac{1 + xy}{\sqrt{(1 + x^2)(1 + y^2)}}$.

- a. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, simplifier l'expression $1 - q(x, y)^2$.
- b. En déduire que la fonction $f : (x, y) \mapsto \text{Arccos}(q(x, y))$ est définie et continue sur $\mathbb{R}^2$.
- c. Sur un ensemble $\mathcal{D}$ à préciser, calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de la fonction f .
- d. En déduire une simplification de l'expression $f(x, y)$. Interpréter géométriquement.

Exercice 5. (*) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$.

Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_a^b f(x, t) dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. ()** On considère la fonction $\det$, définie sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, interprétée comme une fonction de n^2 variables.

- a. Déterminer la différentielle de cette fonction en I_n .
- b. Déterminer la différentielle de cette fonction en une matrice A quelconque.

Extremums

Exercice 7. (*) On définit de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ la fonction $f : (x, y) \mapsto xy(1 - x - y)$.

- a. Représenter l'ensemble $D = \{(x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2 ; 1 - x - y \geq 0\}$.
- b. Montrer que f admet sur D un maximum, que l'on déterminera.

Exercice 8. (*) Déterminer les extremums sur $[0, \pi]^2$ de la fonction $f : (x, y) \mapsto \sin(x) + \sin(y) + \sin(x + y)$.

Exercice 9. (*) Trouver les extremums de la fonction $f : (x, y) \mapsto (x - y)^2 - xy$ sur l'ensemble D défini par

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}.$$

Exercice 10. ()** On définit sur $[0, +\infty[^2$ une fonction f en posant $f(0, 0) = 0$ et

$$f(x, y) = \frac{xy}{(x + y)(1 + x)(1 + y)} \quad \text{si } (x, y) \neq (0, 0).$$

- a. Montrer que cette fonction est continue.
- b. Trouver les points critiques de f dans l'ouvert $]0, +\infty[^2$.
- c. Pour tout $(x, y) \in ([0, +\infty[)^2$ tel que $x + y \geq 8$, montrer la majoration $f(x, y) < 1/8$.
- d. Déterminer les extremums de la fonction f sur $([0, +\infty[)^2$.

Exercice 11. ()** Dans cet exercice, on identifie les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ à ceux de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On se donne une matrice A de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et un vecteur B de $\mathbb{R}^n$. On définit la fonction

$$f : X \mapsto \frac{1}{2} X^T \cdot A \cdot X - B^T \cdot X$$

de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$.

- Pour tout $(X, H) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, montrer que $f(X + H) = f(X) + (AX - B|H) + \frac{1}{2}(H|AH)$.
- Pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, montrer que $\nabla f(X) = AX - B$.
- Si A est symétrique définie positive, montrer que f possède un minimum et qu'il est atteint en un unique point.
- Montrer que f possède un minimum si et seulement si la matrice $A \in \mathcal{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ et $B \in \text{Im}(A)$.

Exercices divers

Exercice 12. ()** On note Ω le complémentaire de l'origine dans $\mathbb{R}^2$ et on considère une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. On fixe α dans $\mathbb{R}$.

Dire que la fonction f est *positivement homogène* de degré α signifie qu'elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad \forall t \in]0, +\infty[, \quad f(tx, ty) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est positivement homogène de degré α si et seulement si elle vérifie l'identité suivante

$$\forall (x, y) \in \Omega, \quad x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Exercice 13. ()** On note U l'ouvert $\mathbb{R}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ de $\mathbb{R}^n$. On se donne une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0, +\infty[$, à valeurs réelles, et on définit sur U la fonction

$$F : (x_1, \dots, x_n) \mapsto f\left(\sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right).$$

- Pour tout i dans $\llbracket 1, n \rrbracket$, exprimer la fonction $\partial^2 F / \partial x_i^2$.
- En déduire une expression du laplacien de F , défini par $\Delta F = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 F}{\partial x_i^2}$.
- Trouver une condition nécessaire et suffisante sur la fonction f pour que la fonction F soit harmonique (c'est-à-dire de laplacien nul).

Exercice 14. (*)** Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Dire que f est *convexe* signifie que

$$\forall (x_0, x_1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \forall t \in [0, 1], \quad f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

Étant donné deux éléments x et y de $\mathbb{R}^n$, on leur associe la fonction

$$g_{x,y} : t \mapsto f((1-t)x + ty),$$

définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Étant donné un élément x de U et un vecteur v de $\mathbb{R}^n$, on leur associe la fonction

$$h_{x,v} : t \mapsto f(x + tv),$$

définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

- Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout couple (x, v) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, la fonction $h_{x,v}$ est convexe sur $\mathbb{R}$.
- Montrer que f est convexe si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad f(y) \geq f(x) + df(x) \cdot (y - x).$$
- Montrer que f est convexe si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice $H_f(x)$ est positive.