

PC* 26 - DEVOIR N° 17

corrigé

Grandeurs mécaniques associées au champ électromagnétique

X-ÉNS (MP)

Q1. Le vecteur de Poynting s'exprime par $\vec{R} = \vec{E} \wedge \vec{B} / \mu_0$. Il a la dimension d'une puissance par unité de surface, c'est à dire MT^{-3} . Dans le système international d'unité, il s'exprime en watt par mètre carré.

Q2. On remarque que

$$\vec{g}_{em} = \frac{\vec{R}}{c^2} .$$

La dimension de \vec{g}_{em} est donc $ML^{-2}T^{-1}$ et celle de $\vec{\ell}_{em}$ est $ML^{-1}T^{-1}$. Pour obtenir \vec{G}_{em} , on intègre $\vec{g}_{em}dV$ donc

$$[\vec{G}_{em}] = [\vec{g}_{em}]L^3 = MLT^{-1} .$$

. Une quantité de mouvement est de la forme $P = mv$ et $[P] = MLT^{-1}$. Ainsi, \vec{G}_{em} a bien la dimension d'une quantité de mouvement.

Un moment cinétique a la dimension de $O\vec{M} \wedge \vec{P}$, c'est à dire celle de P multipliée par une longueur. Comme

$$[\vec{\ell}_{em}] = L[\vec{g}_{em}], \quad [\vec{L}_{em}] = L[G_{em}] ,$$

\vec{L}_{em} a bien la dimension d'un moment cinétique.

Q3. C'est une question de cours. En négligeant les effets de bord, on détermine la direction et les variables dont dépend \vec{B} . On applique le théorème d'Ampère à un rectangle. En admettant que le champ est nul à distance infinie de l'axe (O, \vec{u}_z) , on montre que pour $t \leq 0$,

$$\begin{cases} \vec{B}_{sol}(M, t) = \mu_0 n i_0 \vec{u}_z & \text{si } r < b \\ \vec{B}_{sol}(M, t) = \vec{0} & \text{si } r > b \end{cases}$$

Ce champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde d'une part et à l'extérieur d'autre part. Pour $t \geq \tau$, le courant est nul donc $\vec{B}(M, t) = \vec{0}$.

Q4. Pour $t < 0$, et pour $t > \tau$ les sources du champ se réduisent à des courants permanents et ne produisent pas de champ électrique $\vec{E}(M, t) = \vec{0}$. Pour $t \in [0, \tau]$, les sources produisent un champ magnétique variable donné par les expressions de Q3, en remplaçant simplement i_0 par $i(t)$ grâce à l'hypothèse d'ARQS. Ces sources sont donc aussi à l'origine d'un champ électrique, comme l'affirme l'équation de Maxwell-Faraday

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{ou sa forme intégrale} \quad \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot \vec{\ell} = -\frac{d\Phi}{dt} .$$

Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est un plan de symétrie des sources donc \vec{E} lui est orthogonal. À cause de l'invariance par rotation des sources autour de (O, \vec{u}_z) , E ne dépend pas de θ . On choisit pour Γ un cercle d'axe (O, \vec{u}_z) passant par M et orienté selon \vec{u}_θ . Alors $\oint \vec{E} \cdot \vec{\ell} = 2\pi r E(r, z)$.

— Pour $r \leq b$, $\Phi = \pi r^2 \mu_0 n i(t)$ donc

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0 n r}{2} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta .$$

— Pour $r \geq b$, $\Phi = \pi b^2 \mu_0 n i(t)$ donc

$$\vec{E} = -\frac{b^2 \mu_0 n}{2r} \frac{di}{dt} \vec{u}_\theta .$$

Ce champ électrique n'est uniforme ni à l'intérieur ni à l'extérieur du solénoïde.

Q5. Pendant la durée τ , la particule subit la force électrique $q\vec{E}$. Comme elle ne bouge presque pas, on évalue \vec{E} au point initial en lequel \vec{u}_θ se confond avec \vec{e}_x . La seconde loi de Newton s'écrit

$$\frac{d\vec{v}_p}{dt} = \frac{q\vec{E}}{m} \quad \text{et s'intègre en} \quad \vec{v}_p(\tau) = \frac{q}{m} \int_0^\tau \vec{E} dt = \frac{q}{m} \int_0^\tau -\frac{b^2 \mu_0 n}{2a} \frac{di}{dt} \vec{e}_y \quad \boxed{\vec{v}_p(\tau) = \frac{qb^2 \mu_0 n i_0}{2ma} \vec{e}_y} .$$

Pour $t > \tau$, la particule ne subit plus de force et conserve cette vitesse.

Q6. La loi de Coulomb donne

$$\vec{E}(M) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3}$$

Q7. Pour $t < 0$, \vec{B} est nul hors du solénoïde, donc \vec{g}_{em} aussi. Dans le solénoïde,

$$\vec{G}_{em} = \frac{q}{4\pi} \left(\int \frac{\overrightarrow{PM}}{PM^3} d\tau \right) \wedge \mu_0 n i_0 \vec{e}_z = \frac{q}{4\pi} \left(-\frac{2\pi b^2}{a} \vec{e}_x \right) \wedge \mu_0 n i_0 \vec{e}_z \quad \boxed{\vec{G}_{em} = \frac{qb^2\mu_0 n i_0}{2a} \vec{e}_y}$$

Pour $t > \tau$, $\vec{B} = \vec{0}$, $\vec{g}_{em} = \vec{0}$ et $\vec{G}_{em} = \vec{0}$.

Q8. La quantité de mouvement de la particule passe de $\vec{0}$ pour $t < 0$ à $m\vec{v}_p(\tau)$ pour $t \geq \tau$. La quantité de mouvement du champ passe de $\vec{G}_{em}(t < 0)$ exprimé ci-dessus à $\vec{0}$. Ni la quantité de mouvement de la particule, ni celle du champ ne se conserve. Mais on remarque que

$$m\vec{v}_p(\tau) = \vec{G}_{em}(t < 0) \quad .$$

Le champ a donc cédé sa quantité de mouvement à la particule et la quantité de mouvement de l'ensemble {champ, particule} est conservée.

Réduction des nuisances sonores
CCINP

Q24. Dans l'approximation acoustique, $\rho_1 \ll \rho_0$, $p_1 \ll p_0$, $v_1 \ll c$. Toutes les quantités portant l'indice 1 sont considérées comme des infiniment petits d'ordre 1 et on néglige dans les calculs tous les termes d'ordre 2 ou plus.

Q25. L'équation d'Euler s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p$$

En projection sur \vec{u}_x , on obtient ici

$$(\rho_0 + \rho_1) \left(\frac{\partial v_1}{\partial t} + v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p_1}{\partial x}$$

Les termes $v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x}$ et est négligeable devant $\frac{\partial v_1}{\partial t}$, le terme $\rho_1 \frac{\partial v_1}{\partial t}$ est d'ordre 2 et négligeable devant $\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t}$. On obtient donc

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{\partial p_1}{\partial x} = 0 \quad (\text{EL}) \quad .$$

L'équation de conservation de la masse $\vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) + \partial \rho / \partial t$ s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x} [(\rho_0 + \rho_1)v_1] + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad .$$

En négligeant le terme $\rho_1 v_1$, on obtient

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial \rho_1}{\partial t} = 0 \quad (\text{CL}).$$

Q26. Comme les variations de ρ et p sont petites, et comme le fluide évolue de manière isentropique, la dérivée $\frac{\partial \rho}{\partial p}$ évaluée en (p_0, ρ_0) peut être approximée par le taux d'accroissement

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right)_S \simeq \frac{\rho_1}{p_1} \quad .$$

Donc

$$\chi_{S,0} \simeq \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho_1}{p_1} \quad \text{et} \quad \rho_1 \simeq \rho_0 \chi_{S,0} p_1 \quad .$$

Q27. En dérivant (EL) par rapport à x , on obtient

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x \partial t} .$$

En éliminant ρ_1 , l'équation (CL) devient

$$\frac{\partial v_1}{\partial x} + \chi_{S,0} \frac{\partial p_1}{\partial t} = 0 \quad \text{d'où on déduit} \quad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x \partial t} = -\chi_{S,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} = 0 .$$

Finalement,

$$\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_{S,0} \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} .$$

On reconnaît l'équation de d'Alembert avec la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_{S,0}}}$.

Q28. Les hypothèses de l'énoncé permettent d'appliquer à une particule fluide de masse m la loi de Laplace $PV^\gamma = Cste$. Comme $V = m/\rho$, on en déduit $P\rho^{-\gamma} = Cste'$. La dérivée logarithmique de cette relation par rapport à P s'écrit

$$\frac{1}{P} - \gamma \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial P} = 0$$

d'où on déduit

$$\chi_S = \gamma P .$$

Dans l'expression de c , χ_S est évaluée en (p_0, ρ_0) donc

$$c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} .$$

Q29. L'équation (EL) s'écrit ici

$$\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -k p_{1m} \sin(\omega t - kx) \quad \text{et s'intègre en} \quad v_1 = \frac{k}{\rho_0 \omega} p_{1m} \cos(\omega t - kx) + F(M) .$$

Le champ indépendant du temps $F(M)$ correspondrait à un écoulement en l'absence d'onde acoustique, ce qui ne correspond pas à la situation étudiée : $F(M) = 0$. De plus, l'équation de d'Alembert impose $\omega = ck$. Finalement, $v_1 = p_1/Z_c$ avec $Z_c = \rho_0 c$.

Pour une onde se propageant en sens inverse, on aurait $p_1 = p_{1m} \cos(\omega t + kx)$, ce qui change un signe dans la dérivation par rapport à x et conduit à $v_1 = -p_1/Z_c$.

Q30. Le premier terme représente l'énergie cinétique des particules et le second le surcroît de leur énergie interne associé à leur variation de pression au voisinage de p_0 .

$$\langle\langle p_1^1 \rangle\rangle = \frac{p_{1m}^2}{2} \quad \langle v_1^2 \rangle = \frac{p_{1m}^2}{2\rho_0^2 c^2} \quad \langle e \rangle = \frac{\chi_{S,0} p_{1m}^2}{4} + \frac{p_{1m}^2}{4\rho_0 c^2} \quad \boxed{\langle e \rangle = \frac{p_{1m}^2}{2\rho_0 c^2}} .$$

Q31. Une pression est une force par unité de surface, donc I est le produit d'une force par une vitesse, par unité de surface. Or une puissance est le produit d'une force par une vitesse. Ainsi, I est bien une puissance par unité de surface.

$$I = \langle p_1 v_1 \rangle = \langle p_1 \frac{p_1}{Z_c} \rangle = \frac{p_{1m}^2}{2Z_c} = \frac{\rho c^2 \langle e \rangle}{\rho_0 c} \quad \boxed{I = c \langle e \rangle} .$$

Q32. La puissance absorbée par les parois est $P_a = \alpha_m S I_r$ et l'énergie sonore contenue dans la pièce $\mathcal{E} = V \langle e \rangle = 4V I_r / c$.

Q33. Pendant dt , le champ acoustique cède l'énergie $P_a dt$ aux parois de sorte que le bilan d'énergie sonore s'écrit

$$d\mathcal{E} = -P_a dt \quad \text{ce qui conduit à} \quad \frac{dI_r}{dt} + \frac{\alpha_m S c}{4V} I_r = 0 .$$

On en déduit

$$I_r(t) = I_{r0} e^{-t/\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{4V}{\alpha_m S c} .$$

Q34.

$$L(T_r) - L(0) = -60 \Leftrightarrow 10 \log \frac{I_r(T_r)}{I_0} - 10 \log \frac{I_{r0}}{I_0} = -60 \Leftrightarrow I_r(T_r) = 10^{-6} I_{r0} \Leftrightarrow e^{-t/\tau} = 10^{-6} \Leftrightarrow T_r = 6\tau \ln 10$$

$$\boxed{T_r = \frac{24 \ln 10}{c} \frac{V}{S\alpha_m}} .$$

En unité SI, $24 \ln 10/c = 0,162 \text{ s.m}^{-1}$ et on retrouve bien la formule de Sabine.

Q35. Pour cette salle, on calcule

$$V = L\ell h = 5000 \text{ m}^3 \quad \text{et} \quad S = 2(L\ell + Lh + \ell h) = 1900 \text{ m}^2 .$$

Sur les courbes, on lit le temps de réverbération optimale pour la musique symphonique $T_{r \text{ opt}} = 1,7 \text{ s}$. Le temps de réverbération de 5 secondes est en effet trop long. La présence du public introduit, par le corps des spectateurs, une absorption supplémentaire qui abaisse T_r et est susceptible de le rapprocher de la valeur optimale.

À partir de $T_r = 5 \text{ s}$, on calcule

$$\alpha_m = 0,16 \frac{V}{S T_r} = 0,084 .$$

L'aire au sol de la salle est de 500 m^2 et j'estime qu'elle peut contenir 500 personnes. Le corps de chacune présente une aire d'environ 1 m^2 donc $S_p = 500 \text{ m}^2$. Dans l'équation différentielle de la question 33, $\alpha_m S$ est remplacé par $\alpha_m S + \alpha_{mp} S_p$. La formule de Sabine devient

$$T_r' = 0,16 \frac{V}{\alpha_m S + \alpha_{mp} S_p} = 1,3 \text{ s} .$$

Le temps de réverbération est presque optimale. Avec un peu moins de public, ce sera parfait!

Q36. La résultante des forces de pression sur la tranche d'air est

$$\vec{F}_p = (p_0 - p_c) s \vec{u}_x .$$

Le volume de la cavité passe de V_c au repos à $V_c - xs$. La loi de Laplace s'écrit

$$p_c (V_c - xs)^\gamma = p_0 V_c \quad p_c = p_0 \left(\frac{V_c}{V_c - xs} \right)^\gamma = p_0 \left(1 - \frac{xs}{V_c} \right)^{-\gamma} \simeq p_0 \left(1 + \frac{\gamma xs}{V_c} \right)$$

En reportant cette expression de p_c dans celle de \vec{F}_p , on obtient

$$\vec{F}_p = -\frac{\gamma xs}{V_c} p_0 xs \vec{u}_x .$$

Cette force est analogue à celle d'un ressort : $F_p = -kx$ avec

$$\boxed{k = \frac{\gamma s^2 p_0}{V_c} = \frac{s^2 \rho_0 c^2}{V_c}}$$

Q37. La tranche d'air possède la masse $\ell \rho_0 s$. En lui appliquant la seconde loi de Newton, on obtient

$$\ell \rho_0 \ddot{x} = -kx \quad \dot{x} + \frac{k}{\ell \rho_0 s} x = 0 .$$

C'est l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation et de fréquence propres

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{\rho_0 s \ell}} = \sqrt{\frac{c^2 s}{V_c}} \quad f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{c^2 s}{\ell V_c}} .$$

Q38. Selon le modèle précédent, on devrait obtenir des oscillations harmoniques. En réalité, on observe qu'elles s'amortissent et cela s'explique par l'existence de phénomènes dissipatifs non pris en compte par le modèle : viscosité du fluide qui frotte contre la paroi, absorption par la paroi et rayonnement d'énergie acoustique hors de la cavité.

On peut estimer grossièrement le facteur de qualité par le nombre d'oscillations visibles : ici $Q \approx 20$.

Q39. Comme le facteur de qualité est assez élevé, on peut confondre la pseudo-période et la période propre. Sur le graphique on lit $5T_0 = 0,05$ s donc $T_0 = 0,01$ s et $f_0 = 100$ Hz. Le modèle donne $f_0 = 120$ Hz : l'ordre de grandeur est correct. La prise en compte des couches situées de part et d'autre du col augmenterait la masse dans la seconde loi de Newton et conduirait donc à une fréquence plus basse que 120 Hz, ce qui améliorerait l'accord avec la valeur mesurée.

Q40. Du côté gauche, la pression ne sera plus p_0 mais $p_0 + p(t)$, de sorte qu'une force $p(t)s$ s'ajoute au membre de droite de la loi de Newton, qui s'écrit maintenant

$$\rho_0 s \ell \ddot{x} = p(t)s - kx \quad .$$

En notation complexe, on obtient

$$\rho_0 s \ell (j\omega)^2 \underline{x} = p_m e^{j\omega t} - k \underline{x} \quad \underline{x} = \frac{p_m s e^{j\omega t}}{\rho_0 s \ell (j\omega)^2 + k}$$

$$\underline{v} = j\omega \underline{x} = \frac{j\omega p_m s e^{j\omega t}}{\rho_0 s \ell (j\omega)^2 + k} \quad \underline{v} = v_m e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad v_m = \frac{j\omega p_m}{\rho_0 \ell (\omega_0^2 - \omega^2)} \quad .$$

Si $\omega \rightarrow \omega_0$, v_m tend vers l'infini. En réalité, la prise en compte des effets dissipatifs introduirait un terme supplémentaire au dénominateur, sans doute proportionnel à $j\omega$, et $|v_m|$ présenterait près de ω_0 un extremum fini.

Q41. En utilisant les résultats de Q29,

$$v_i = \frac{p_{im}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)} \quad v_t = \frac{p_{tm}}{Z_c} e^{j(\omega t - kz)} \quad v_r = -\frac{p_{rm}}{Z_c} e^{j(\omega t + kz)} \quad .$$

Q42. On admet qu'il y a continuité de la pression en $z = 0$.

$$p_m = p_{im} + p_{rm} = p_{tm} \quad .$$

Le débit qui entre par le bas est $D_{v1} = S(v_i + v_r)$, celui qui sort par le haut est $D_{v2} = S v_t$ et celui qui entre dans le résonateur $D_{v3} = s v$. La conservation du débit s'écrit $D_{v1} = D_{v2} + D_{v3}$ ce qui donne

$$\frac{S p_{im}}{Z_c} - \frac{S p_{rm}}{Z_c} = \frac{S p_{tm}}{Z_c} + s v_m \quad .$$

Il est paradoxal d'affirmer que le débit volumique se conserve alors qu'on étudie en acoustique un écoulement compressible. L'échelle de longueur sur laquelle les compressions et détentes du fluide ont lieu est la longueur d'onde λ . Si la zone de transition entre l'onde incidente et l'onde transmise est bien plus courte que λ , on peut à cette échelle affirmer que le fluide est presque incompressible. C'est le cas si $\sqrt{s} \ll \lambda$. À 1000 Hz, $\lambda = 34$ cm et ici, $\sqrt{s} = 1,4$ cm, dont cette condition est satisfaite.

Q43.

$$L_{TL} = 10 \log \left(1 + \frac{1}{4\beta^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2} \right)$$

Q44. Le résonateur de Helmholtz constitue un filtre éliminateur (ou réjecteur) de bande. La bande éliminée se situe près de la fréquence propre du résonateur et plus α augmente, plus la largeur de cette bande augmente : on élimine une plage de fréquences plus importante.

Figures de Chladni

X-ENS PSI 24

1. Pour un réseau cubique, on peut attribuer à chaque liaison aboutissant du dS un aire r_0^2 . Donc $\delta N = dS/r_0^2$. Comme chaque liaison exerce la force $k(r - r_0)$, la force totale s'exerçant sur dS est

$$\delta F = \delta N k(r - r_0) = \frac{dS}{r_0^2} k(r - r_0) \quad .$$

L'allongement $\frac{\partial x}{\partial x}$ défini à l'échelle mésoscopique s'identifie, pour une liaison, à $(r - r_0)/r_0$:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{r - r_0}{r_0} \quad r_0 = r_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad .$$

Finalement,

$$\delta F = \frac{\delta S}{r_0^2} k r_0 \frac{\partial \xi}{\partial x} = \delta S \frac{k}{r_0} \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad .$$

En identifiant cette relation à celle qui définit le module de Young, on trouve

$$\boxed{E = \frac{k}{r_0}} \quad .$$

2. En ordre de grandeur $r_0 = 3.10^{-10}$ m donc 5.10^{10} Pa $< E < 13.10^{10}$ Pa. Cela est cohérent avec la valeur de $6,9.10^{10}$ Pa fournie par l'énoncé.

3. Pendant le mouvement, l'épaisseur de la tranche devient

$$dx' = dx + \xi(x + dx, t) - \xi(x, t) = dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \quad .$$

Si on considère comme en acoustique que le déplacement ξ est un petit terme d'ordre 1, alors à l'ordre 0 : $dx' \simeq dx$. Cette remarque permet de considérer que les extrémités de la tranche sont presque séparées de dx . Dans ces conditions, elle subit les forces

$$F(x + dx, t) - F(x, t) = dx \frac{\partial F}{\partial x} = ES dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad .$$

4. En lui appliquant la seconde loi de Newton, on obtient

$$\rho dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = ES dx \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{\rho}{E} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

Dans cette équation de d'Alembert, on identifie la célérité

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}} \quad .$$

5.

$$c = 5.10^3 \text{ m.s}^{-1} \quad .$$

6. Le volume du solide est $V = a^2 \ell$ et une différentielle logarithmique donne

$$\frac{\delta V}{V} = 2 \frac{\delta a}{a} + \frac{\delta \ell}{\ell} \quad .$$

Par définition du coefficient, on a

$$\frac{\delta a}{a} = -\nu \frac{\delta \ell}{\ell} \quad \text{donc} \quad \frac{\delta V}{V} = -2\nu \frac{\delta \ell}{\ell} + \frac{\delta \ell}{\ell} = \frac{\delta \ell}{\ell} (1 - 2\nu) \quad \frac{\delta V}{V} = \epsilon (1 - 2\nu) \quad .$$

Pour un matériau incompressible, $\delta V = 0$ donc $\nu = 1/2$.

7. On cherche des solutions de l'équation d'onde de la forme

$$z = z_0 e^{i(\vec{K} \cdot \vec{OM} - \omega t)} \quad .$$

Dans ce cas, $\Delta z = -K^2 z$, $\Delta(\Delta z) = K^4 z$ et $\partial_{t^2} z = -\omega^2 z$. Cette fonction est solution de l'équation d'onde si et seulement si

$$DK^4 z - \rho h \omega^2 z = 0 \quad \boxed{K^4 = \frac{\rho h}{D} \omega^2} \quad .$$

Pour résoudre une relation de dispersion, on suppose habituellement que ω est donnée réelle et on cherche K . Adoptons ici ce point de vue, bien que l'énoncé ne soit pas très explicite et que la suite puisse laisser penser le contraire. On obtient alors

$$K^2 = \pm \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega \quad \text{donc} \quad K = \pm \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \quad \text{ou} \quad K = \pm i \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}$$

Les solutions imaginaires pures correspondent à des ondes évanescentes. Les solutions réelles décrivent des ondes se propageant sans atténuation à la vitesse de phase

$$v_\varphi = \frac{\omega}{K} = \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}.$$

Cette vitesse de phase dépend de ω donc la propagation est dispersive.

Pour $K \in \mathbb{R}^+$, la relation de dispersion se différentie en

$$2K dK = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} d\omega \quad \text{donc} \quad v_g = \frac{d\omega}{dK} = 2K \sqrt{\frac{D}{\rho h}} = 2 \left(\frac{\rho h}{D} \right)^{1/4} \sqrt{\omega} \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \quad \boxed{v_g = 2 \left(\frac{D}{\rho h} \right)^{1/4} \sqrt{\omega}} .$$

8. L'énoncé ne précise pas où se trouve l'origine des coordonnées. Nous décidons que les bords sont définis par $x = 0$, $x = a$, $y = 0$, $y = a$. Comme le déplacement vertical est nul sur ces quatre bords, on peut écrire les relations suivantes, valables pour tout t .

$$\begin{aligned} \forall y \in [0, a], z(0, y, t) = 0 & \quad \text{donc} \quad \varphi_x = 0 \quad . \\ \forall y \in [0, a], z(a, y, t) = 0 & \quad \text{donc} \quad \sin K_x a = 0 \quad \text{donc} \quad \exists m \in \mathbb{N}^*, K_x = m \frac{\pi}{a} \quad . \end{aligned}$$

De même, on obtient $\varphi_y = 0$ et $K_y = n\pi/a$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Pour trouver les fréquences propres, nous allons utiliser la relation de dispersion établie dans la question précédente et remplaçant K^2 par (\vec{K}^2) , c'est à dire par $(K_x^2 + K_y^2)^2$. Cette démarche n'est pas évidente puisqu'on étudie ici des ondes stationnaires alors qu'elles étaient auparavant planes progressives. Je pense que l'auteur de l'énoncé n'a pas pris garde à cette subtilité. Avec l'expression (5) de z , on a

$$\Delta z = -(K_x^2 + K_y^2)z \quad \Delta(\Delta z) = -(K_x^2 + K_y^2)^2 z \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = -\omega^2 z$$

et z est solution de l'équation d'onde si et seulement si

$$\omega^2 = \frac{D}{\rho h} (K_x^2 + K_y^2)^2 \quad .$$

Les pulsations propres sont donc

$$\omega_{m,n} = \sqrt{\frac{D}{\rho h}} \frac{\pi^2}{a^2} (m^2 + n^2) \quad \boxed{\omega_{m,n} = \frac{\pi^2}{a^2} \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2\rho)}} (m^2 + n^2)} \quad .$$

9. Dans une onde stationnaire régie par l'équation de d'Alembert, la distance entre deux nœuds est $d = \lambda/2$. Sur la première figure, on mesure $d \approx a/5 = 4,8$ cm donc $\lambda = 2d \approx 9,6$ cm. La fréquence associée est

$$f = \frac{c}{\lambda} = \frac{5 \cdot 10^3}{0,096} \approx 50 \text{ kHz} \quad .$$

Ce n'est pas l'ordre de grandeur de la fréquence de résonance observée et le modèle de la partie A doit donc être exclu.

10. Une même figure de Chladni correspond à un même mode, c'est à dire à même couple d'indices (m, n) . D'après la question 8, on attend une fréquence de résonance proportionnelle à h . Quand on passe de $h = 1$ mm à $h = 2$ mm puis à $h = 5$ mm, on s'attend donc à ce que la fréquence soit multipliée par 2 puis encore par 2,5. On attend donc $f_1(2 \text{ mm}) = 1260$ Hz et $f_1(5 \text{ mm}) = 3150$ Hz. Ces valeurs s'écartent de quelques pourcent des valeurs mesurées et le modèle paraît grossièrement satisfaisant.

Les conditions de bord de l'expérience ne sont pas celles de la question 8 puisque ces bords peuvent ici vibrer, mais je ne sais pas si cela change le fait que ω est proportionnel à h . Peut-être les billes placées sur la plaque modifient-elles légèrement la vibration.

11. Le modèle a donné une relation de dispersion dans laquelle $\omega \propto K^2$, donc $f \propto K^2$. Cela est bien en accord avec les résultats expérimentaux dans lesquels un ajustement en K^2 passe très près des points relevés (idéalement, il faudrait des barres d'erreur pour conclure).

La relation de dispersion donne

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} = uK^2 \quad \text{avec} \quad u = \sqrt{\frac{Eh^2}{12(1-\nu^2)\rho}} \quad .$$

Numériquement,

$$u = \frac{10^{-3}}{2\pi} \sqrt{\frac{6,9 \cdot 10^{10}}{12 \times (1 - 1/3^2) \times 2,7 \cdot 10^3}} \approx 0,25 \quad \text{calcul approximatif à la main} \quad .$$

Compte tenu de l'imprécision du calcul, ce résultat est en accord avec le coefficient 0,222 obtenu par ajustement de la courbe.

Ondes transversales le long d'une corde
corrigé

1. La déformation est faible si $a \ll \lambda$. Cela assure en particulier que l'angle α formé localement par la tangente à la corde avec \vec{u}_z est faible.

2. La portion $[0, z]$ de la corde est soumise à son poids $\mu z \vec{g}$ et à $\vec{T}(z)$. À l'équilibre, on a $-\mu z g + T(z) = 0$ donc $T(z) = \mu g z$.

3. On reprend ici la démonstration classique vue en cours. Le tronçon de corde situé entre les cotes z et $z + dz$ a pour masse $dm = \mu dz$ et son accélération est $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \vec{u}_y$. Il subit son poids $dm \vec{g}$, la tension \vec{T}_1 exercée par la portion $[0, z]$ et celle \vec{T}_2 exercée par la portion $[z + dz, L]$. Par hypothèse de l'énoncé, ces forces ont pour norme $T(z)$ et $T(z + dz)$. La première est dirigée vers le bas et seconde vers le haut (faire sur la copie un dessin montrant les vecteurs ainsi que les angles $\alpha(z, t)$ et $\alpha(z + dz, t)$). En projetant la loi de Newton sur \vec{u}_y , on obtient

$$\mu dz \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T(z + dz) \sin(\alpha(z + dz, t)) - T(z) \sin(\alpha(z, t))$$

Comme $a \ll \lambda$, $\alpha \ll 1$ et $\sin \alpha \simeq \tan \alpha$. Par définition d'une dérivée, $\tan(\alpha(z, t)) = \frac{\partial h}{\partial z}(z, t)$. L'équation précédent devient donc

$$\begin{aligned} \mu dz \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &\simeq T(z + dz) \frac{\partial h}{\partial z}(z + dz, t) - T(z) \frac{\partial h}{\partial z}(z, t) \\ \mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(T \frac{\partial h}{\partial z} \right) \end{aligned}$$

4. La relation précédente s'écrit encore

$$\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z} \quad .$$

Dans la question 2, on a établi $T = \mu g z$ donc $\frac{\partial T}{\partial z} = \mu g$. En ordre de grandeur, $\partial h / \partial z \simeq a / \lambda$ et $\partial^2 h / \partial z^2 \simeq a / \lambda^2$. Donc

$$\frac{|\frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial h}{\partial z}|}{|T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2}|} \sim \frac{\mu g \frac{a}{\lambda}}{\mu g z \frac{a}{\lambda^2}} = \frac{\lambda}{z} \quad .$$

On peut négliger le terme en $\frac{\partial T}{\partial z}$ si $z \gg \lambda$. « Assez loin » de l'extrémité inférieure de la corde, on peut écrire

$$\mu \frac{\partial^2 h}{\partial t^2} \simeq T \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \quad .$$

5. On applique la règle de la chaîne pour relier les dérivées de h à celles de H .

$$h(z, t) = H(Z = \sqrt{\frac{z}{L}}, t) \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{\partial H}{\partial Z} \left(\sqrt{\frac{z}{L}}, t \right) \quad \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{Lz^{3/2}}} \frac{\partial H}{\partial Z} + \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}$$

On a par ailleurs $\frac{\partial^2 h}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 H}{\partial t^2}$. L'équation d'onde se réécrit donc

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \mu g z \left(-\frac{1}{4} \frac{1}{\sqrt{Lz^{3/2}}} \frac{\partial H}{\partial Z} + \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \right) \\ \mu \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \frac{\mu g}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{Lz}} \frac{\partial H}{\partial Z} + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \right) \\ \frac{\partial^2 H}{\partial t^2} &= \frac{g}{4} \left(-\frac{1}{LZ} \frac{\partial H}{\partial Z} + \frac{1}{L} \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \right) \quad \boxed{\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = \frac{g}{4L} \left(\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} - \frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial Z} \right)} \end{aligned}$$

6. Comme dans la question 4, il s'agit de comparer deux termes en ordre de grandeur. De même qu'on note λ l'échelle spatiale de variation selon z , notons Λ (lambda majuscule) l'échelle de variation selon Z . Comme $\lambda \ll L$, on peut le relier à Λ par différentiation

$$Z = \sqrt{\frac{z}{L}} \quad \delta Z = \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \delta z \quad \Lambda = \frac{1}{2\sqrt{Lz}} \lambda \quad .$$

En ordre de grandeur, $\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \sim \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial H}{\partial Z}$.

$$\frac{\frac{1}{Z} \frac{\partial H}{\partial Z}}{\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2}} \sim \frac{\Lambda}{Z} = \frac{\lambda}{2\sqrt{Lz}} \sqrt{\frac{L}{z}} = \frac{\lambda}{2z} \quad .$$

On peut négliger le terme en $\partial H/\partial Z$ si $z \gg \lambda$, c'est à dire assez loin de l'extrémité de la corde, comme dans la question 4. Dans ces conditions, l'équation se simplifie en

$$\frac{\partial^2 H}{\partial t^2} = c_0^2 \frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \quad \text{avec} \quad c_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{L}} \quad .$$

Il s'agit d'une équation de d'Alembert, mais comme Z est sans dimension, c_0 est en s^{-1} . C'est une vitesse dans l'espace (Z, t) où les longueurs sont sans dimension.

7. $c_0 = 1,6 \text{ s}^{-1}$.

8. Procédons à une analyse d'ordre de grandeur de cette équation de d'Alembert. Grâce à l'approximation de la question 6, on a

$$\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \sim 4Lz \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \sim 4L^2 \frac{a}{\lambda^2} \quad .$$

On a utilisé $z \simeq L$ loin de l'extrémité. On peut obtenir le même résultat par

$$\frac{\partial^2 H}{\partial Z^2} \sim \frac{a}{\Lambda^2} = \frac{a}{\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{Lz}}\right)^2} \sim \frac{4aL^2}{\lambda^2} \quad .$$

L'échelle des variations temporelles est τ . En ordre de grandeur, l'équation de d'Alembert s'écrit donc

$$\frac{a}{\tau^2} \sim c_0^2 \frac{4aL^2}{\lambda^2} \quad \text{donc} \quad \lambda \sim 2c_0 L \tau \quad .$$

Comme $c_0 \tau \ll 1$, vérifie que $\lambda \ll L$.

9. On sait que la solution de l'équation de d'Alembert est de la forme $H(Z, t) = H^+(Z, t) + H^-(Z, t)$ avec $H^+ = F(Z - c_0 t)$ et $H^- = G(Z + c_0 t)$. La perturbation $h(z_0, t)$ se réécrit, compte tenu du changement de variable, $H(Z_0, t) = \varphi_0(t)$. Ce se traduit par

$$\forall t, \quad \varphi_0(t) = F(Z_0 - c_0 t) + G(Z_0 + c_0 t) \quad .$$

D'après l'énoncé, $H^+(Z_0, t) = H^-(Z_0, t)$ donc $G(Z_0 + ct) = F(Z_0 - c_0 t)$. On en déduit

$$F(Z_0 - c_0 t) = \frac{\varphi_0(t)}{2} \quad G(Z_0 + c_0 t) = \frac{\varphi_0(t)}{2} \quad .$$

On pose $u = Z_0 - c_0t$ soit $t = (Z_0 - u)/c_0$. La relation précédente se réécrit $F(u) = \varphi_0[(Z_0 - u)/c_0]/2$. De même, en posant $v = Z_0 + c_0t$, on obtient $G(v) = \varphi_0[(v - Z_0)/c_0]/2$. Finalement,

$$H(Z, t) = \frac{1}{2}\varphi_0[(Z_0 - Z + c_0t)/c_0] + \frac{1}{2}\varphi_0[(Z - Z_0 + c_0t)/c_0]$$

$$H(Z, t) = \frac{a}{2} \exp \left[-\frac{(t - (Z - Z_0)/c)^2}{\tau^2} \right] + \frac{a}{2} \exp \left[-\frac{(t + (Z - Z_0)/c)^2}{\tau^2} \right] \quad (1)$$

Un fois écrite, l'expression de $H(Z, t)$ est « assez naturelle » et le calcul aurait été plus commode en utilisant la notation $H(Z, t) = F(t - Z/c_0) + G(t + Z/c_0)$. On reconnaît la somme de deux OP de sens inverses et de même amplitude.

On s'intéresse ici à des instants t positifs. Considérons d'abord $Z > Z_0$. Dans ce cas, le second terme est relativement petit et concentrons-nous sur le premier. Le quotient $(Z - Z_0)/c_0$ s'interprète comme le temps de parcours de l'onde de la cote Z jusqu'à Z_0 . Le premier terme signifie que l'onde H^+ en Z à t est celle qui régnait en Z_0 à l'instant $t - \Delta t$ avec $\Delta t = (Z - Z_0)/c$. Considérons maintenant $Z < Z_0$. Dans ce cas, le premier terme est relativement petit et concentrons-nous sur le second. $\Delta t' = (Z_0 - Z)/c$ s'interprète comme le temps de parcours de l'onde de la cote Z_0 jusqu'à la cote Z , et on voit apparaître $t - \Delta t'$ dans l'exponentielle. Le second terme signifie que l'onde H^- en Z à t est celle qui régnait en Z_0 à l'instant $t' = t - \Delta t'$. En résumé, le mouvement imposé à la cote en Z_0 produit une onde voyageant vers les Z croissants, et une autre vers les Z décroissants. Ces considérations apparaîtront plus clairement après les questions 12 et 13 (voir le croquis représentant l'évolution de l'onde).

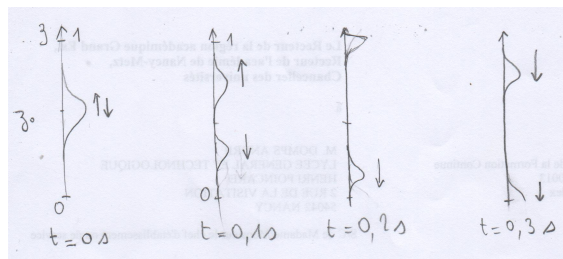
Ce traitement occulte les conditions de bord aux extrémités de la corde, c'est à dire la réflexion de l'onde. Il est valable tant que H reste presque nulle aux deux extrémités, c'est à dire tant que la perturbation n'atteint pas les extrémités.

10.

$$h(z, t) = \frac{a}{2} \exp \left[-\frac{(t - (\sqrt{z/L} - \sqrt{z_0/L})/c)^2}{\tau^2} \right] + \frac{a}{2} \exp \left[-\frac{(t + (\sqrt{z/L} - \sqrt{z_0/L})/c)^2}{\tau^2} \right]$$

Le premier terme est h^+ , le second h^- .

11. Conformément aux expressions de la question 10, la vibration est constituée d'une bosse se propageant vers les z croissants et d'une autre se propageant vers les z décroissants. Le maximum se trouve en $z_m = 0,5$ m à $t = 0$ et à cet instant, les deux ondes sont confondues. On a donc $z_0 = 0,5$ m. On voit aussi, à partir de $t = 0,2$ s, l'onde se réfléchir à l'extrémité supérieure de la corde.



La vitesse à laquelle le maximum se déplace est $c_m = dz_m/dt$ (c'est la pente de la courbe). Pour l'onde qui va vers le haut, c_m augmente au fil de temps, alors que pour l'onde allant vers le bas, elle diminue au fil du temps. Cela signifie que la célérité est d'autant plus grande que z_m l'est, et cela s'avère cohérent avec l'analyse théorique qui précède. En effet, l'onde avance dans l'espace Z à la pseudo célérité $c_0 : dZ_m/dt = c_0$. Comme $z_m = LZ^2$,

$$\frac{dz_m}{dt} = 2LZm \frac{dZ_m}{dt} = 2L\sqrt{\frac{z_m}{L}}c_0 = 2\sqrt{Lz_m}c_0 \quad .$$

Plus z_m augmente, plus cette vitesse augmente.

12. Dans l'espace (Z, t) , la pseudo vitesse c_0 est constante, donc la position Z_m du maximum varie de manière linéaire au fil du temps, en croissant pour le terme H^+ et en décroissant pour le terme H^- .

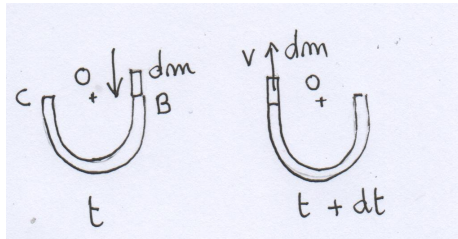
13. Sur le graphique de droite, on mesure la pente dZ_m/dt , elle s'identifie à c_0 . On obtient ainsi $c_0 = 1,4 \text{ s}^{-1}$. La valeur n'est pas très éloigné de la valeur de $1,6 \text{ s}^{-1}$ obtenue à la question 7, mais l'écart est trop fort pour être dû à une simple erreur d'exploitation graphique. Je n'ai pas d'explication.

14. La portion de corde située entre B et C constitue un système ouvert en régime permanent. On se ramène à un système fermé. À l'instant t , il comporte un élément de masse dm au dessus de B , et l'arc BC . À l'instant $t + dt$, il comporte l'arc BC et un élément de masse dm au dessus de C . Analysons la variation de sa quantité de mouvement.

$$\vec{P}(t) = \vec{P}_{BC} + dm(-v \vec{u}_z) \quad \vec{P}(t + dt) = \vec{P}_{BC} + dm v \vec{u}_z \quad d\vec{P} = \vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = 2dmv \vec{u}_z$$

Comme $dm = \mu v dt$, $d\vec{P}/dt = 2\mu v^2 \vec{u}_z$. Ce système de longueur πR est soumis à son poids $\mu \pi R \vec{g}$, à \vec{T}_B et à \vec{T}_C . Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit

$$2\mu v^2 = -\pi R \mu g + T_C + T_B \quad \text{d'où} \quad T_C + T_B = 2\mu v^2 + \pi R \mu g \quad .$$



Procédons maintenant à un bilan de moment cinétique (en principe hors programme). L'élément de masse dm situé au dessus de B a pour moment cinétique $R \vec{u}_y \wedge dm(-v \vec{u}_z) = -dm R v \vec{u}_x$. Celui situé au dessus de C a pour moment cinétique $-dm R \vec{u}_y \wedge v \vec{u}_z = -dm R v \vec{u}_x$.

$$\vec{\sigma}_O(t) = \vec{\sigma}_{0,BC} - -dm R v \vec{u}_x \quad \vec{\sigma}_O(t) = \vec{\sigma}_{0,BC} - -dm R v \vec{u}_x \quad d\vec{\sigma}_O = \vec{0}$$

Le poids de ce système s'applique sur une droite passant par O donc son moment est nul. Les moments des forces de tension valent $RT_B \vec{u}_x$ et $-RT_C \vec{u}_x$. Le théorème du moment cinétique s'écrit

$$0 = RT_B - RT_C \quad \text{donc} \quad T_C = T_B \quad .$$

Finalement

$$T_C = T_B = \frac{\mu}{2}(2v^2 + \pi Rg) \simeq \mu v^2 \quad \text{si} \quad v^2 \gg Rg \quad .$$

15. On s'intéresse cette fois à la portion de corde verticale comprise entre C et M . Elle s'élève à vitesse constante, sa quantité de mouvement ne varie pas. Le théorème de la quantité de mouvement s'écrit donc $0 = -T_C + T_M - \mu z g$ donc $T_M = T_C + \mu g z = \mu(gz + v^2)$.

$$c(z) = \sqrt{v^2 + gz} \quad .$$

Le même raisonnement et la même expression s'appliquent du côté descendant de la corde.

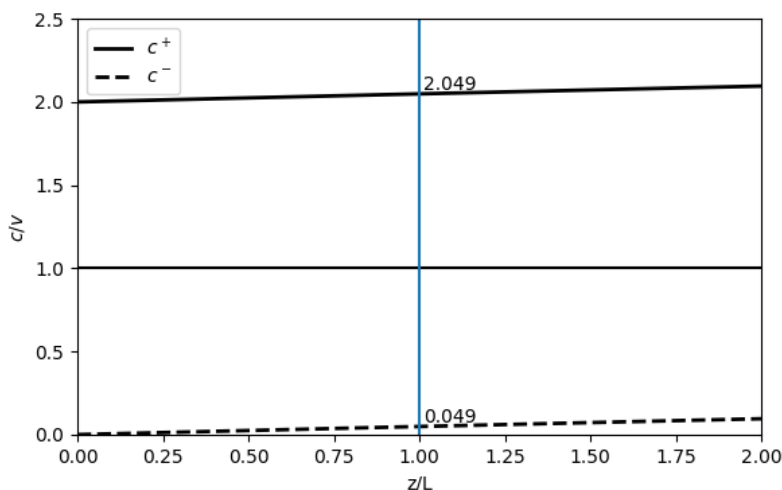
16. Considérons le référentiel \mathcal{R}' en translation rectiligne uniforme par rapport à \mathcal{R} , de vitesse $v \vec{u}_z$. Dans \mathcal{R}' , la partie montante de la corde est au repos. Si on la perturbe, on peut établir dans \mathcal{R}' l'équation d'onde comme dans les premières questions. Il est en de même dans la partie descendante en prenant le référentiel \mathcal{R}'' de vitesse $-v \vec{u}_z$. Ainsi, $c(z)$ s'interprète comme une célérité des ondes dans le référentiel entraîné en défilement avec la corde. Dans \mathcal{R}' et \mathcal{R}'' , on les ondes progressives peuvent avancer selon \vec{u}_z ou selon $-\vec{u}_z$, sans le sens de défilement de la corde ou en sens opposé. En appliquant la loi de composition des vitesses, cela amène à définir, pour un observateur lié à \mathcal{R} , les deux vitesses (en valeur absolue)

$$c^+(z) = c(z) + v = \sqrt{v^2 + gz} + v \quad \text{propagation dans le sens du défilement}$$

$$c^-(z) = c(z) - v = \sqrt{v^2 + gz} - v \quad \text{propagation dans le sens inverse du défilement} \quad .$$

$$\frac{c^+}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} + 1 = \sqrt{1 + \frac{gL}{v^2} \frac{z}{L}} + 1 \quad \frac{c^-}{v} = \sqrt{1 + \frac{gz}{v^2}} - 1 = \sqrt{1 + \frac{gL}{v^2} \frac{z}{L}} - 1$$

Par définition, $z/L \in [0, 1]$ et avec les valeurs de l'énoncé, $gL/v^2 = 0, 1$. On représente le graphe des fonctions $u \rightarrow \sqrt{1+0}, 1u+1$ et $u \rightarrow \sqrt{1+0}, 1u-1$. La partie $z/L > 1$ n'a ici pas de signification. Je ne vois pas très bien l'intérêt de ces courbes.



17. On observe tout d’abord, sur la première image, que toute la portion du brin descendant située en dessous du point d’appui a été affectée par la perturbation. La perturbation a lieu entre $t = 0$ et $t = 0,1$ s et la première image est prise à $\tau = 0,1$ s. En se propageant à $c^+ \simeq 20 \text{ m.s}^{-1}$, la perturbation descendant le long du brin descendant de corde peut facilement atteindre l’extrémité inférieure de la corde. En remontant le long du brin montant, elle a même le temps d’atteindre le haut de la corde, et c’est pourquoi on observe aussi, dès la second image, une perturbation qui descend le long du brin montant de la corde (en haut de l’image).

Ensuite, on a affaire à une onde qui remonte le long du brin descendant et à une onde qui descend le long du brin montant. Elles ont pour célérité $c^-(z)$. Les courbes tracées en tirets montrent le déplacement des fronts d’onde correspondant. Les dates sont $\tau, 2\tau, 3\tau$, etc, de sorte que la pente de ces courbes donne la vitesse instantanée de ces ondes. Pour la courbe montante, on voit la vitesse augmenter peu à peu alors que pour la courbe descendante, on voit la vitesse diminuer peu à peu. Cela s’expliquer par le fait que c^- est une fonction croissant de z . Sur les images les plus à droite, les deux ondes se trouvent à des altitudes voisines et les pentes sont proches (en valeur absolue).

Analysons maintenant quelques valeurs numériques.

- Tout en haut de la courbe descendante, on mesure une pente de $0,56 \text{ m.s}^{-1}$ (on trace la tangente à la courbe, puis on utilise l’échelle verticale et $\tau = 0,1$ s entre deux images). Selon le modèle théorique, $c^-(z = L) = 10 \times (\sqrt{1 + 0,1 \times 1} - 1) = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Les deux valeurs sont en accord.
- Tout en bas de la courbe montante, on mesure une pente de $0,13 \text{ m.s}^{-1}$. Selon le modèle théorique, avec $z/L \simeq 0,25$, on attend $c^- = 10 \times (\sqrt{1 + 0,1 \times 0,25} - 1) = 0,125 \text{ m.s}^{-1}$ Là encore, les deux valeurs sont en accord.

Oscillations solaires
corrigé

22. Il faut ici reproduire la démonstration de cours, ce qui suppose d’introduire quelques notations que l’énoncé ne fournit pas : $v, \rho_0, \delta\rho, \chi S$. Étrangement, cette question est très peu cadrée alors que dans la seconde épreuve de la même session du concours, toute une partie du problème, longue et détaillée, était consacrée à l’établissement de l’équation des ondes acoustiques. On a bien entendu $c = 1/\sqrt{\rho_0\chi S}$.

23. Comme nous l’avons vu en cours, la démonstration en trois dimensions est presque la même, mais on fait apparaître le laplacien de la pression.

24. $e^{ik_x x}$ est périodique en x , avec une période égale à $2\pi/k_x$. Le périmètre doit être multiple de cette période :

$$\exists \ell, 2\pi R = \ell \frac{2\pi}{k_x} \quad \boxed{k_x = \frac{\ell}{R}} .$$

25. Question 25 supprimée.

26. Avec l'expression de p proposée,

$$\Delta p = \left(f''(z) - k_x^2 f(z) \right) e^{i(k_x x - \omega t)}$$

et l'équation de d'Alembert équivaut à

$$f''(z) + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 \right) f(z) = 0 \quad . \quad (2)$$

27. La condition $f(0) = 0$ équivaut à $p(x, 0, t) = 0$, c'est à dire que la surpression acoustique s'annule à la surface. On peut le comprendre en admettant que le vide règne au dessus de la surface. Au dessus de la surface, la pression (et la surpression) sont donc nulles et par continuité de la pression, elle l'est aussi en $z = 0^-$.

Pour comprendre la condition portant sur f' , exprimons la vitesse en utilisant l'équation d'Euler linéarisée. On obtient

$$\vec{v} = \frac{1}{i\rho_0\omega} e^{i(k_x x - \omega t)} \left[-f'(z) \vec{u}_z + ik_x f(z) \vec{u}_x \right] \quad .$$

La condition $f'(-H) = 0$ équivaut donc à $v_z(x, -H, t) = 0$: la composante verticale de la vitesse s'annule à la limite inférieure de la couche. Cela signifie que cette interface est immobile et imperméable ; la condition de bord introduite est celle vérifiée par un fluide parfait sur une interface.

28. La forme des solutions de l'équation différentielle (2) dépend du signe de $\omega^2/c^2 - k_x^2$.

— Si $\omega^2/c^2 - k_x^2 < 0$, on pose $-q^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$ avec $q \in \mathbb{R}$ et on obtient

$$f = Ae^{-qz} + Be^{qz} \quad .$$

Les conditions de bord s'écrivent $A + B = 0$ et $-qA + qB = 0$, ce qui conduit à $A = B = 0$: ce cas est sans intérêt. Il en est de même si $\omega^2/c^2 - k_x^2 = 0$.

— Si $\omega^2/c^2 - k_x^2 > 0$, on pose $q^2 = \omega^2/c^2 - k_x^2$ avec $q \in \mathbb{R}$ et on obtient

$$f = A \cos qz + B \sin qz \quad .$$

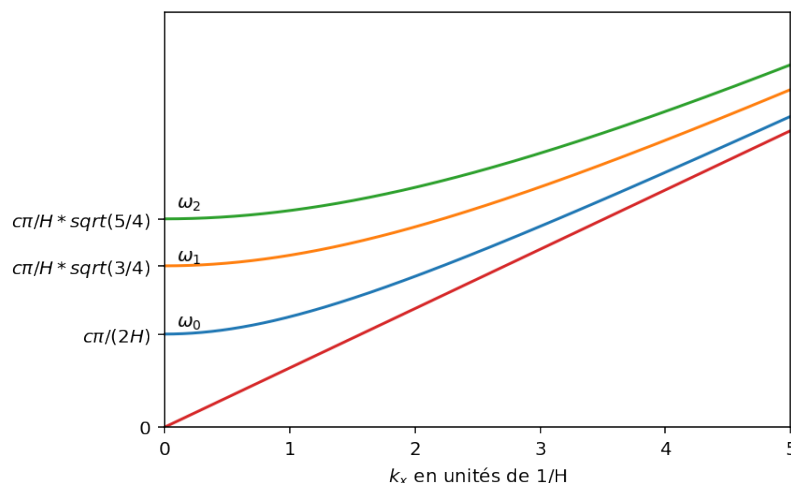
Les conditions de bord donnent $A = 0$ et $qB \cos qH = 0$. On obtient une solution non nulle ($B \neq 0$), c'est à dire que l'onde peut exister, si

$$qH = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad n \in \mathbb{N} \quad .$$

On en déduit $q^2 = (2n + 1)^2 \pi^2 / (4H^2)$ puis

$$\omega_n^2 = c^2 \left(k_x^2 + (2n + 1)^2 \frac{\pi^2}{4H^2} \right) \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

29. Les courbes sont croissantes et, pour tout k_x , $\omega_2 > \omega_1 > \omega_0$. Remarquer que les courbes présentent la même asymptote d'équation $\omega = ck_x$ pour $k_x \gg 1/H$.



30. L'expression de ω_n se réécrit sous la forme

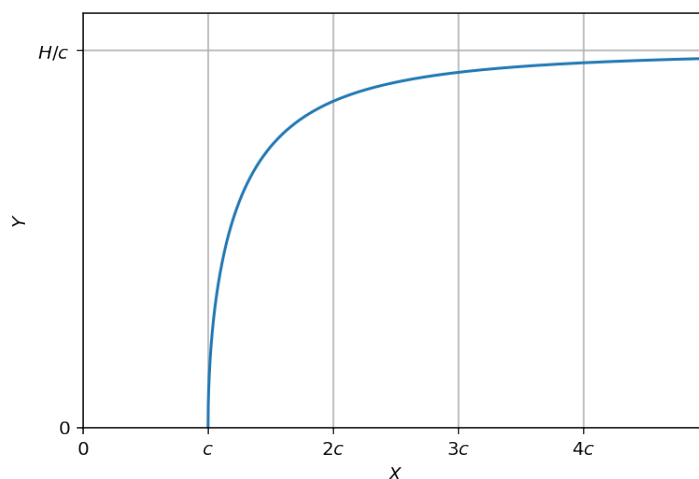
$$1 = c^2 \left(\frac{k_x^2}{\omega_n^2} + \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi^2}{H^2 \omega_n^2} \right) = c^2 \left(\frac{1}{X^2} + \frac{Y^2}{H^2} \right)$$

c'est à dire

$$\frac{1}{c^2} - \frac{1}{H^2} = \frac{Y^2}{H^2} \quad \boxed{Y = H \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{1}{X^2}}}$$

Comme on l'a déjà vu dans la question 28, ces relations ne s'appliquent que si $\omega^2/c^2 > k_x^2$, c'est à dire si $X^2 > c^2$, ce qui assure que la différence sous la racine est positive.

On étudie rapidement la fonction $X \rightarrow Y$: elle est strictement croissante et sa dérivée tend vers l'infini si $X \rightarrow c$, ce qui se manifeste par une tangente verticale sur le graphe.



31. Il n'est pas facile d'utiliser le concept de rayon acoustique ni celui modèle du fluide stratifié. Nous l'avons peut-être évoqué en optique lors d'un exercice sur la fibre optique à gradient d'indice ou sur les mirages. Ici, le modèle n'est pas très précisément décrit et, chose très étonnante, le même thème était abordé dans l'autre épreuve de la même session du concours, avec cette fois des explications bien plus détaillées ! Il faut comprendre que l'équation d'Alembert s'applique avec une célérité dépendant de z :

$$\Delta p - \frac{1}{c(z)^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = 0 \quad .$$

On considère une onde plane, donc p est de la forme

$$p(x, z, t) = A \exp[i(k_x x + k_z z - \omega t)] \quad .$$

En reportant dans l'équation de d'Alembert, on obtient

$$k_x^2 + k_z^2 = \frac{\omega^2}{c(z)^2} \quad .$$

C'est la relation de dispersion usuelle, mais écrite ici avec c qui dépend de z .

32. Soit $k = \sqrt{k_x^2 + k_z^2} = \omega/c(z)$ la norme du vecteur d'onde et i l'angle que ce vecteur forme avec la verticale. Une simple projection donne $k_x = k \sin i$ c'est à dire

$$k_x = \frac{\omega}{c(z)} \sin i \quad .$$

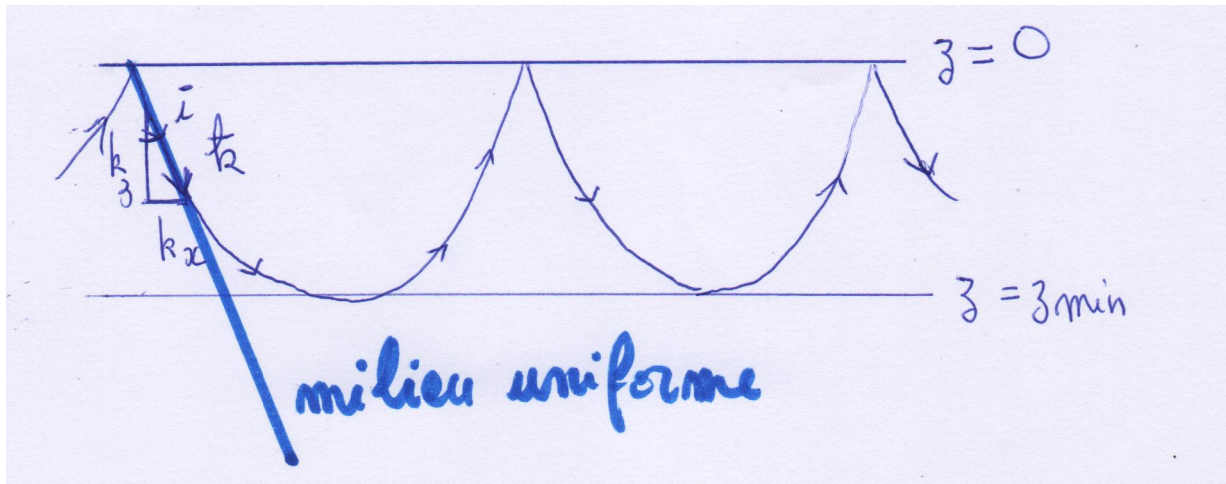
L'énoncé a demandé d'admettre que k_x est une constante. Introduisons un indice acoustique n , analogue de l'indice optique, et défini par $n(z) = c(z)/c_0$ où c_0 est une vitesse de référence quelconque. Dire que k_x est constant équivaut à dire que $n(z) \sin i = Cste$ et ceci est l'analogie de la loi de Descartes écrite dans un milieu stratifié en optique géométrique : lorsqu'un rayon traverse une succession de couches planes, on a $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 = \dots$

33. Si z diminue, $c(z)$ augmente et comme k_x est constant, $\sin i$ augmente et i augmente. Cela signifie qu'un rayon qui se dirige vers les profondeurs s'incline de plus en plus par rapport à la verticale. Cependant, $\sin i$ est majoré par 1 donc $k_x \leq \omega/c(z)$. Comme c décroît si z augmente, on en déduit $z \geq z_{\min}$ avec

$$c(z_{\min}) = \omega/k_x \quad .$$

On peut aussi utiliser le résultat de la question 31 : la condition $k_z^2 \geq 0$ conduit au même résultat, le cas limite étant défini par $k_z = 0$.

34.



35. Dans un milieu uniforme, le rayon lumineux associé à l'onde plane se propagerait en ligne droite comme le montre le trait épais.

36. Dans un milieu uniforme, k_z serait constant et $\int_{z_{\min}}^0 k_z dz = k_z z_{\min}$. La condition déterminant les modes propres s'écrirait dans ce cas

$$k_z z_{\min} = (n + \alpha)\pi \quad k_z = \frac{(n + \alpha)\pi}{z_{\min}}$$

et, en utilisant le résultat de la question 31, on aurait

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + \frac{(n + \alpha)\pi^2}{z_{\min}^2} \quad .$$

Pour $\alpha = 1/2$, ce résultat est identique à celui de la question 28.

37. Deux rayons sont identiques s'ils présentent en tout point la même inclinaison, c'est à dire si $\sin i = \sin i'$, ce qui équivaut à

$$\frac{k_x}{\omega} = \frac{k'_x}{\omega'} \quad .$$

38. Remarquons tout d'abord que l'abscisse et l'ordonnée de la figure 3 sont les variables X et Y introduites question 30, à l'ajustement près de α . On retrouve d'ailleurs sur cette figure l'allure du graphe tracé en réponse à cette question 30.

Comme $k_x = \omega_n/X$, la relation de la question 31 s'écrit

$$\frac{\omega_n^2}{X^2} + k_z(z)^2 = \frac{\omega^2}{c^2(z)} \quad \text{donc} \quad k_z = \omega_n \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{X^2}} \quad .$$

La condition (3) qui détermine les modes propres s'écrit donc

$$(n + \alpha)\pi = \int_{z_{\min}}^0 dz, \omega_n \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{X^2}} \quad .$$

En divisant par ω_n on fait apparaître $Y = (n + \alpha)\pi/\omega_n$ dans le membre de gauche :

$$Y = \int_{z_{\min}}^0 dz \sqrt{\frac{1}{c^2(z)} - \frac{1}{X^2}}$$

La fonction $c(z)$ est donnée, elle ne dépend que du profil de température dans le Soleil. La profondeur z_{\min} est telle que $c(z_{\min}) = \omega_n/k_x = X$, donc z_{\min} est fonction de X . Ainsi, l'intégrale dans le membre de droite n'est fonction que de X et on a une relation du type $Y = F(X)$. Avec les variables choisies, tous les points sont donc sur la même courbe qui est le graphe de cette fonction.

39. Dans le cours d'optique, nous avons vu que l'optique géométrique et le concept de rayon lumineux constituent une approximation de la théorie ondulatoire. Il n'est pas question ici de justifier très précisément cette simplification, mais on peut se rappeler qu'elle est valable si $a \gg \lambda$, où a désigne la distance caractéristique sur laquelle l'indice du milieu varie et λ la longueur d'onde, c'est à dire la distance caractéristique des variations de sa phase.

Ici, la phase varie selon x et z sur des longueurs $1/k_x$ et $1/k_z$. Soit L la longueur caractéristique de variation de $c(z)$. L'approximation géométrique convient si

$$L \gg \frac{1}{k_x} \quad \text{et} \quad L \gg \frac{1}{k_z} \quad .$$

Comme $k_x = \ell/R$ (question 24) et comme $k_z \simeq (n + \alpha)\pi/z_{\min}$, on peut réécrire ces conditions en les faisant porter sur ℓ et n . On obtient

$$\ell \gg \frac{R}{L} \quad \text{et} \quad n \gg \frac{z_{\min}}{L} \quad .$$

Peut-être faudrait-il considérer la longueur $1/k = 1/\sqrt{k_x^2 + k_z^2}$ et écrire $L \gg 1/k$. Dans ce cas, on obtiendrait

$$\sqrt{\frac{\ell^2}{R^2} + \frac{n^2\pi^2}{z_{\min}^2}} \gg \frac{1}{L} \quad .$$