PC* 26 - DEVOIR N° 18

corrigé

Effet Faraday dans un échantillon de Hall quantique

ENS

Remarquer tout d'abord que c'est la vecteur $\overrightarrow{j}_{3D}$ qui correspond à la densité volumique de courant vue en cours et s'exprimant en $\mathrm{A.m^{-2}}$. Le vecteur $\overrightarrow{j}$ de l'énoncé s'exprime en $\mathrm{A.m^{-1}}$: cette description des courants ne figure pas à notre programme. Fort heureusement, nous n'avons besoin que de $\overrightarrow{j}_{3D}$ pour traiter le problème.

73. Il s'agit d'un simple calcul pour lequel on effectue le produit matriciel avec le vecteur $\overrightarrow{E}$ proposé par l'énoncé.

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} & \sigma_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} - i\sigma_{xy} \\ -\sigma_{xy} - i\sigma_{xx} \end{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(kz-\omega t)} = (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \frac{E_0}{\sqrt{2}} e^{i(kz-\omega t)}$$

$$\overrightarrow{j} = (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \overrightarrow{E} \qquad \overrightarrow{j}_{3D} = \frac{\overrightarrow{j}}{d} = \frac{\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}}{d} \overrightarrow{E}$$

74. Pour le champ électrique proposé, $\mathrm{div}\,\overrightarrow{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$. L'équation de Maxwell- Gauss indique donc que le matériau est neutre. Le trois autres équations de Maxwell s'écrivent

$$\mathrm{div}\,\overrightarrow{B} = 0 \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{E} = -\frac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B} = \mu_0(\overrightarrow{j}_{3D} + \epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}) = \mu_0 \left(\frac{\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}}{d} \overrightarrow{E} + \epsilon_0 \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} \right)$$

75. En prenant membre à membre le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday puis en éliminant, selon la technique usuelle, $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{B}$ avec l'équation de Maxwell-Ampère, on obtient l'équation d'onde

$$\Delta \overrightarrow{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \overrightarrow{E}}{\partial t^2} - \frac{\mu_0}{d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = \overrightarrow{0} \quad .$$

Pour $\overrightarrow{E} = E_0 e^{i(kz-\omega t)}\, \overrightarrow{\epsilon}$, on a $\Delta \overrightarrow{E} = -k^2 \overrightarrow{E}$, $\frac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t} = -i\omega \overrightarrow{E}$ et $\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 \overrightarrow{E}$. Cette équation d'onde donne donc

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{\mu_0}{d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \times (-i\omega) = 0$$

$$\left(\frac{ck}{\omega} \right)^2 = 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \quad .$$

76. Par définition, $n = ck/\omega$ donc la relation précédente s'écrit

$$n_+^2 = 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \quad .$$

Comme n_+ est proche de 1, on pose $n_+ = 1 + u$ avec $u \ll 1$ puis un développement limité permet d'écrire $n_+^2 \simeq 1 + 2u$ c'est à dire

$$1 + 2u \simeq 1 + \frac{i}{\epsilon_0 \omega d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) \quad \text{d'où} \quad u \simeq \frac{i}{2\epsilon_0 \omega d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy})$$

et donc, en remplaçant ω par ck_0,

$$n_+ \simeq 1 + i \frac{Z_0}{2k_0 d} (\sigma_{xx} - i\sigma_{xy}) = 1 + i \frac{Z_0 \sigma_{xx}}{2k_0 d} + \frac{Z_0 \sigma_{yy}}{2k_0 d} \quad .$$

A.N. : $Z_0 = 377\,\Omega$.

77. Notons $\overrightarrow{\epsilon}_+ = \overrightarrow{\epsilon} = (\overrightarrow{u_x} - i\overrightarrow{u_y})$ le vecteur introduit par l'énoncé pour décrire les ondes PCD. Pour une onde PCG, il faut le remplacer par $\overrightarrow{\epsilon}_- = (\overrightarrow{u_x} + i\overrightarrow{u_y})$. En reprenant les calculs de la question 73, on obtient alors

$$\overrightarrow{j}_{3D} = \frac{\sigma_{xx} + i\sigma_{xy}}{d}\overrightarrow{E}$$

Dans la relation de dispersion, il suffira donc de changer σ_{xy} en $-\sigma_{xy}$ ce qui donne l'indice

$$\boxed{n_- = 1 + i\frac{Z_0\sigma_{xx}}{2k_0 d} - \frac{Z_0\sigma_{yy}}{2k_0 d}} \quad .$$

Sur une copie de concours, il est inutile de refaire l'intégralité des calculs qui sont similaires aux précédents. Vous pouvez ne les mener qu'au brouillon.

78. Selon un procédé très classique que nous avons rencontré en exercice, on écrit le champ à l'entrée de l'échantillon comme la somme d'un champ PCD et d'un champ PCG.

$$\overrightarrow{E}(0,t) = E_0 e^{-i\omega t}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overrightarrow{u_x} - i\overrightarrow{u_y}}{\sqrt{2}} + \frac{\overrightarrow{u_x} + i\overrightarrow{u_y}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}\left(\overrightarrow{\epsilon}_+ + \overrightarrow{\epsilon}_-\right)$$

Le premier terme se propage avec l'indice n_d et le second avec l'indice n_g de sorte que le champ à la sortie de l'échantillon s'écrit

$$\overrightarrow{E}(d,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{-i\omega t}(e^{in_+\frac{\omega}{c}d}\overrightarrow{\epsilon}_+ + e^{in_-\frac{\omega}{c}d}\overrightarrow{\epsilon}_-)$$

On a

$$n_+\frac{\omega}{c}d = 1 + i\frac{Z_0\sigma_{xx}}{2} + \frac{Z_0\sigma_{yy}}{2} \quad \text{et} \quad n_-\frac{\omega}{c}d = 1 + i\frac{Z_0\sigma_{xx}}{2} - \frac{Z_0\sigma_{yy}}{2} \quad .$$

En décomposant $\overrightarrow{\epsilon_+}$ et $\overrightarrow{\epsilon_-}$ sur la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, on obtient après quelques manipulations

$$\overrightarrow{E}(d,t) = \frac{E_0}{\sqrt{2}}e^{i(\omega d/c - \omega t)}e^{-Z_0\sigma_{xx}/2}\left[\left(e^{iZ_0\sigma_{xy}/2} + e^{-iZ_0\sigma_{xy}/2}\right)\frac{\overrightarrow{u_x}}{\sqrt{2}} + \left(-e^{iZ_0\sigma_{xy}/2} + e^{-iZ_0\sigma_{xy}/2}\right)\frac{i\overrightarrow{u_y}}{\sqrt{2}}\right] \quad .$$

Posons

$$\boxed{\eta = \frac{Z_0\sigma_{xx}}{2}} \quad \boxed{\theta = \frac{Z_0\sigma_{xy}}{2}} \quad \boxed{\overrightarrow{u}_\theta = \cos\theta\overrightarrow{u}_x + \sin\theta\overrightarrow{u}_y} \quad .$$

Alors

$$\overrightarrow{E}(d,t) = E_0 e^{i(\omega d/c - \omega t)}e^{-\eta}\,\overrightarrow{u}_\theta \quad .$$

79. Comme $\overrightarrow{u}_\theta$ est de composantes réelles, on a

$$\mathrm{Re}(\overrightarrow{E}(d,t)) = E_0\cos(\omega d/c - \omega t)e^{-\eta}\,\overrightarrow{u}_\theta \quad .$$

Le champ électrique est à tout instant colinéaire au vecteur fixe $\overrightarrow{u}_\theta$ donc l'onde est polarisée rectilignement à la sortie de l'échantillon ; sa direction de polarisation forme un angle θ avec $\overrightarrow{u}_x$.

80. Dans ce cas $\eta = 0$ (l'onde n'est pas atténuée en traversant le matériau) et

$$\theta = \frac{Z_0}{2}\frac{e^2}{h} = \frac{1}{2c\epsilon_0}\frac{e^2}{2\pi\hbar} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} = \alpha \quad .$$

La constante de structure fine α est un nombre sans dimension que l'on rencontre fréquemment dans les calculs de physique atomique.

81. Selon l'expression précédente, la valeur attendue pour l'angle de rotation est $\theta = 7,3.10^{-3}$. C'est bien la valeur qu'on observe sur la courbe, entre 7 et 7,5 mrad, dans la région où la conductance de Hall vaut e^2/h.

Propriétés optiques de l'or

Q24 En admettant que l'ordre de grandeur déduit de la relation de structure dans le vide est préservé dans le métal, on a : $|\vec{B}_1| \simeq \frac{|\vec{E}_1|}{c}$

$|q\vec{v}_1 \wedge \vec{B}| \leq |q|\,|\vec{v}_1|\,|\vec{B}_1| \simeq q\frac{|\vec{v}_1|}{c}|\vec{E}_1|$

Comme $|\vec{v}_1| \ll c$, $|q\vec{v}_1 \wedge \vec{B}_1| \ll q|\vec{E}_1|$.

On peut négliger le terme magnétique la force de Lorentz.

Q25 $\vec{j}_1 = -(n_{e_0}+n_{e_1})e\vec{v}_1 \simeq -n_{e_0}e\vec{v}_1$

En multipliant III.1 par $(-n_{e_0}e)$, on obtient

$$m_e\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} = n_{e_0}e^2\vec{E}_1 - \frac{m_e}{\tau}\vec{j}_1 .$$

Q26 Le champ ne dépend que de x donc l'onde est plane.

Les variables t et x interviennent dans une combinaison $\omega t - \underline{k}x$: cela caractérise une onde progressive voyageant vers les x croissants.

Le vecteur $\vec{E}$ est colinéaire à $\vec{u}_y$: c'est une polarisation rectiligne.

Q27 $\rho = n_{e_0}e - (n_{e_0}+n_{e_1})e = -n_{e_1}e$

$\mathrm{div}\,\vec{B}_1 = 0 \qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\left(\vec{j}_1 + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}\right)$

$\mathrm{div}\,\vec{E}_1 = -\frac{n_{e_1}e}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\mathrm{rot}}\,\vec{E}_1 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t}$

Q28 $\operatorname{div}\underline{\vec{E}}_1 = \frac{\partial E_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial E_{1y}}{\partial y} + \frac{\partial E_{1z}}{\partial z}$.

Avec la forme III.2, $E_{1y} = E_{1z} = 0$ et E_{1y} ne dépend pas de y, donc $\frac{\partial E_{1y}}{\partial y} = 0$ et $\operatorname{div}\vec{E} = 0$.

L'équation de Maxwell-Gauss donne $n_{e_1} = 0$.

Q29 En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday, on obtient $\vec{\operatorname{rot}}(\vec{\operatorname{rot}}\,\underline{\vec{E}}_1) = -\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\operatorname{rot}}\,\vec{B}_1)$

donc $\vec{\operatorname{grad}}(\operatorname{div}\underline{\vec{E}}_1) - \Delta\underline{\vec{E}}_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\mu_0\left(\vec{j}_1 + \varepsilon_0\frac{\partial \vec{E}_1}{\partial t}\right)\right)$

grâce à Maxwell-Ampère.

Ici, $\operatorname{div}\vec{E} = 0$ donc $\Delta\underline{\vec{E}}_1 - \mu_0\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$.

Pour éliminer $\frac{\partial \vec{j}_1}{\partial t}$, on utilise le résultat de Q25.

Le calcul n'est simple qu'en notation complexe, donc je poursuis avec $\underline{\vec{E}}_1$ (bien que l'énoncé demande $\vec{E}_1$).

$$i\omega m_e \underline{\vec{j}}_1 = n_{0e}\, e^2\, \underline{\vec{E}}_1 - \frac{m_e}{\tau}\underline{\vec{j}}_1$$

$$\underline{\vec{j}}_1 = \frac{n_{0e}\, e^2\, \underline{\vec{E}}_1}{i\omega m_e + m_e/\tau} = \frac{n_{e0}\, e^2}{m_e}\frac{\underline{\vec{E}}_1}{i\omega + 1/\tau}$$

On élimine $\underline{\vec{j}}_1$.

$$\Delta\underline{\vec{E}}_1 - \mu_0\frac{n_{0e}\, e^2}{m_e}\frac{1}{i\omega + 1/\tau}\frac{\partial \underline{\vec{E}}_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}_1}{\partial t^2} = \vec{0}$$

$$\boxed{\Delta\underline{\vec{E}}_1 - \frac{\omega_p^2}{c^2}\frac{1}{i\omega + 1/\tau}\frac{\partial \underline{\vec{E}}_1}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \underline{\vec{E}}_1}{\partial t^2} = \vec{0}}$$

Q30 Avec la forme de $\underline{E}_1$ donnée par III 2,

$$\Delta \underline{\vec{E}_1} = -\underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}_1} \qquad \frac{\partial \underline{\vec{E}_1}}{\partial t} = i\omega \underline{\vec{E}_1} \qquad \frac{\partial^2 \underline{\vec{E}_1}}{\partial t^2} = -\omega^2 \underline{\vec{E}_1}.$$

$\underline{\vec{E}_1}$ est solution de l'équation d'onde si et seulement si

$$-\underline{n}^2 \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}_1} - \frac{i\omega\,\omega_p^2}{c^2} \frac{1}{i\omega + 1/\tau} \underline{\vec{E}_1} + \frac{\omega^2}{c^2} \underline{\vec{E}_1} = \vec{0}$$

d'où $\underline{n}^2 = 1 - \frac{i}{\omega} \omega_p^2 \frac{1}{i\omega + 1/\tau}$ $\qquad \underline{n}^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - \frac{i\omega}{\tau}}$

Q31 $\underline{n}^2 = 1 - \omega_p^2 \frac{(\omega^2 + i\omega/\tau)}{\omega^4 + \omega^2/\tau^2}$

$$\varepsilon_1 = Re(\underline{n}^2) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + 1/\tau^2}$$

$$\varepsilon_2 = -Im(\underline{n}^2) = \frac{\omega_p^2/\tau}{\omega^3 + \omega/\tau^2}$$

$$\boxed{\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_p^2\tau^2}{1+\omega^2\tau^2} \qquad \varepsilon_2 = \frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1+\omega^2\tau^2)}}$$

Q32 Si $\omega\tau \gg 1$, $\quad \varepsilon_1 \simeq 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \qquad \varepsilon_2 \simeq \frac{\omega_p^2}{\omega^3\tau}$

Je ne vois pas comment comparer ε_1 et ε_2 sans connaître ω_p. Par contre, je remarque que :

$1 - \varepsilon_1 = \frac{\omega_p^2}{\omega^2}$ $\qquad$ donc $\quad \varepsilon_2 \simeq (1-\varepsilon_1)\frac{1}{\omega\tau}$

Comme $\omega\tau \gg 1$, $\quad \varepsilon_2 \ll 1 - \varepsilon_1$.

Q 33 Comme $\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$, $\varepsilon_1 \simeq 1 - \frac{\omega_p^2 \lambda^2}{4\pi^2 c^2}$.

Le graphe de $-\varepsilon_1$ en fonction de λ^2 doit représenter une droite de pente $p = \frac{\omega_p^2}{4\pi^2 c^2}$. C'est bien ce qu'on observe sur la figure 3a), avec une pente

$$p = 53\ \mu m^{-2} = 53.10^{12}\ m^{-2}$$

$$n_{e_0} = \frac{m_e \varepsilon_0 \omega_p^2}{e^2} = \frac{m_e \varepsilon_0}{e^2} \times 4\pi^2 c^2 p \qquad \underline{n_{e_0} = 6.10^{28}\ m^{-3}}$$

$$\varepsilon_2 \simeq \frac{\omega_p^2 \lambda^3}{8\pi^3 c^3 \tau} \qquad \frac{\varepsilon_2}{\lambda} = \alpha \lambda^2 \text{ avec } \alpha = \frac{\omega_p^2}{8\pi^3 c^3 \tau}.$$

Le graphe de $\frac{\varepsilon_2}{\lambda}$ en fonction de λ^2 fait apparaître une droite de pente $\alpha = \frac{13}{4} = 3{,}25\ \mu m^{-3} = 3{,}25.10^{18}\ m^{-3}$

On en déduit $\tau = \frac{\omega_p^2}{8\pi^3 c^3 \alpha} = \frac{4\pi^2 c^2 p}{8\pi^3 c^3 \alpha} = \frac{p}{2\pi c \alpha}$

$$\underline{\tau = 9.10^{-15}\ s}$$

Réflexion d'une oem par un semi-conducteur

1. $\vec{rot}\,\vec{E} = -\partial_t \vec{B} \rightarrow \vec{rot}\,\vec{rot}\,\vec{E} = -\partial_t\,\vec{rot}\,\vec{B}$

$$\vec{grad}\,div\,\vec{E} - \Delta\vec{E} = -\partial_t\left(\mu_0\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\partial_t\vec{E}\right) \quad (1)$$

Avec la forme choisie pour $\vec{E}$, $div\,\vec{E} = \frac{\partial E}{\partial x} = 0$

et $\Delta\vec{E} = \frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2}$.

On obtient donc

$$\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} - \mu_0\frac{\partial\vec{j}}{\partial t} = 0$$

2. Cf cours $\vec{j} = \frac{ne^2}{im\omega}\vec{E}$

3. On élimine $\vec{j}$ et on projette sur $\vec{e}_x$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial z^2} - \frac{\varepsilon_r}{c^2}\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} - \frac{\mu_0 ne^2}{im\omega}\frac{\partial E}{\partial t} = 0$$

Comme E est la représentation complexe du champ,

$\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E$ $\quad \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\omega^2 E$. Après simplification par

$e^{i\omega t}$, on obtient

$$\frac{d^2E_x}{dz^2} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2 E_x - \frac{\mu_0 ne^2}{m}E_x = 0$$

Soit $\boxed{\omega_p = \sqrt{\frac{ne^2}{m\varepsilon_0\varepsilon_r}}}$. Alors $\frac{\mu_0 ne^2}{m} = \mu_0\varepsilon_0\varepsilon_r\omega_p^2 = \frac{\omega_p^2}{c^2}\varepsilon_r$

$$\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right) E_x = 0 \quad (1)$$

4. Pour $z<0$ règne le vide. E est solution de

d'Alembert : $\frac{d^2 E_x}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} E_x = 0$ (2)

5. $E_0 e^{-ikz}$: onde progressant vers les z croissants

$\underline{r} E_0 e^{ikz}$: onde plane progressant vers les z décroissants

Les deux ondes se propagent dans le vide et la relation (1) implique $k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}$. $\boxed{k = \frac{\omega}{c}}$

$\underline{\tau} E_0 e^{-iqz}$: onde plane progressant vers les z croissants.

Elle se propage dans le métal et la relation (2) implique

$$\boxed{q^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}\left(\omega^2 - \omega_p^2\right)}$$

6. $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\vec{\text{rot}}\, \vec{E} = -\frac{dE_x}{dz} e^{i\omega t} \vec{u}_y$

$\vec{B}$ est continu dans l'espace donc $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ l'est.

Donc $\frac{dE_x}{dz}$ l'est aussi.

7. Continuité de E : $E_0 + \underline{r} E_0 = E_0$

$$1 + \underline{r} = \underline{\tau}$$

Continuité de $\frac{dE}{dx}$:

$$-ik\,E_0 + \underline{r}\,ik\,E_0 = -\underline{\tau}\,iq\,E_0$$

$$k(-1+\underline{r}) = -q\,\underline{\tau}$$

On élimine $\underline{\tau}$ pour trouver $\boxed{\underline{r} = \frac{k-q}{k+q}}$

8. Pour $\omega > \omega_p$, $q^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2)$ donne

$$q = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_p^2}$$

Le coefficient de réflexion pour le vecteur de Poynting moyen est donné par $R = \underline{r}\,\underline{r}^*$ avec ici $\underline{r} \in \mathbb{R}$

$$R = \left(\frac{-\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_p^2} + \frac{\omega}{c}}{\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_p^2} + \frac{\omega}{c}}\right)^2$$

$$R = \left(\frac{1-\sqrt{\varepsilon_r}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}{1+\frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{1-\frac{\omega_p^2}{\omega^2}}}\right)^2$$

Pour $\omega \leq \omega_p$, $q^2 = \frac{\varepsilon_r}{c^2}(\omega^2-\omega_p^2)$ donne $q = iK$

avec $K = \frac{\sqrt{\varepsilon_r}}{c}\sqrt{\omega_p^2-\omega^2}$.

Alors $\underline{r} = \frac{k-iK}{k+iK}$ et $R = \frac{k^2+K^2}{k^2+K^2}$ $R = 1$

9. Pour la courbe choisie, on distingue deux comportements :

- $\lambda < 22\,\mu m$: $R < 1$
- $\lambda > 22\,\mu m$: R augmente brutalement et s'approche de 1.

On identifie ces domaines à $\omega > \omega_p$ et $\omega < \omega_p$ respectivement. $\omega_p = \dfrac{2\pi c}{\lambda_p}$ $\lambda_p = 22\,\mu m$.

Pour $\lambda \ll \lambda_p$, i.e. $\omega \gg \omega_p$, $R \longrightarrow \left(\dfrac{\sqrt{\varepsilon_r}-1}{\sqrt{\varepsilon_r}+1}\right)^2 = R_{lim}$

Sur la courbe, on estime cette valeur limite à $R_{lim} \simeq 0{,}33$.

On en déduit $\varepsilon_r = \left(\dfrac{1+\sqrt{R_{lim}}}{\sqrt{R_{lim}}-1}\right)^2$

$$\boxed{\varepsilon_r = 14}$$

$\omega_p^2 = \dfrac{ne^2}{m\,\varepsilon_0\,\varepsilon_r} \longrightarrow m = \dfrac{ne^2}{\varepsilon_0\,\varepsilon_r}\dfrac{\lambda_p^2}{4\pi^2c^2}$ $\boxed{m = 3{,}3.10^{-32}\,kg}$

Partie II

1. $$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} - m\omega_0^2 z\, \vec{e}_z - m\frac{\vec{v}}{\tau}$$

2. En projetant l'équation du mouvement sur $\vec{u}_x$

on obtient : $$m \frac{dv_x}{dt} = -m\frac{v_x}{\tau}$$

$$\boxed{m\, i\omega x_0 = -\frac{m}{\tau} i\omega x_0 \longrightarrow x_0 = 0}$$

Les projections sur $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$ donnent, avec

$$\underline{\vec{v}} = i\omega \vec{r}_0 e^{i\omega t},$$

$$\begin{cases} -m\omega^2 y_0 = -eE_y - ie\omega B z_0 - i\omega \frac{m}{\tau} y_0 \\ -m\omega^2 z_0 = -eE_z + ie\omega B y_0 - i\omega \frac{m}{\tau} z_0 - m\omega_0^2 z_0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} \omega^2 - i\frac{\omega}{\tau} & -\frac{ie\omega B}{m} \\ i\frac{eB}{m}\omega & \omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \frac{e}{m} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix}$$

$$\boxed{M = \begin{pmatrix} \omega^2 - i\omega/\tau & -i\omega\omega_c \\ i\omega_c\omega & \omega^2 - \omega_0^2 - i\frac{\omega}{\tau} \end{pmatrix}}$$

3) $\vec{r}_0 = \frac{e}{m} M^{-1} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix}$

$\vec{j} = -ne\vec{v} = -ne\,i\omega\,\vec{r}_0\, e^{i\omega t}$

$\vec{j} = -\frac{ne^2}{m} i\omega\, M^{-1} \begin{pmatrix} E_y \\ E_z \end{pmatrix} e^{i\omega t}$

$$\boxed{\gamma = \frac{-ne^2}{m} i\omega M^{-1}}$$

4. On utilise le résultat de 1. de la 1ère partie.

$$\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2\vec{E} + \frac{\mu_0 ne^2}{m} i\omega M^{-1}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \vec{0}$$

$$\frac{d^2\vec{E}}{dz^2} + \frac{\varepsilon_r}{c^2}\omega^2\vec{E} - \frac{\mu_0 ne^2}{m}\omega^2 M^{-1}\vec{E} = \vec{0}$$

5. Raisonner à l'ordre 0 en $\frac{1}{\tau}$ revient à remplacer $\frac{1}{\tau}$ par sa limite nulle.

Le dénominateur D s'annule alors si

$$\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2) - \omega^2\omega_c^2 = 0 \longrightarrow \omega_{res} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_c^2}$$

Donc si $\omega \to \omega_{res}$, les coef de $\underline{\gamma}$ tendent vers l'infini.

En réalité, $\frac{1}{\tau}$ n'est pas nul et ces coefficients seront très grands près de ω_{res}.

<u>6.</u> $\omega_{c\,max} = \dfrac{eB_{max}}{m} = 3,8 \cdot 10^{13}$ rad s^{-1} $\qquad \omega_c \ll \omega_0$

$$\omega_0 = \frac{0,1\,eV}{\hbar} = 1,52 \cdot 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\omega_{res} = \omega_0 \sqrt{1 + \frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}} \simeq \omega_0 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{\omega_c^2}{\omega_0^2}\right)$$

<u>7.</u> Si $B = 0$ $\quad T_{res} = 1$ le matériau est transparent à la résonance.

Si $B \nearrow$, $\omega_c \nearrow$ et $\omega_{res} \nearrow$. Dans le même temps, $T(B) \downarrow$: le matériau n'est plus transparent

<u>8.</u> On observe un pic d'absorption à ω_{res}, cette valeur augmentant avec ω comme le prédit le modèle.

$B = 15$ T $\qquad \hbar\omega_{res} = 104$ meV (graphique)

$$\omega_{res} = 1,58 \cdot 10^{14} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\omega_{res}^2 = \omega_0^2 + \omega_c^2 \longrightarrow \omega_c = \sqrt{\omega_{res}^2 - \omega_0^2}$$

$$\omega_c = 1,58 \cdot 10^{13} \text{ rad s}^{-1}$$

$$\boxed{m = \frac{eB}{\omega_c} = 5,5 \cdot 10^{-32} \text{ kg} = 0,06\, m_0}$$

L'ordre de grandeur est le même que celui obtenu à fin de I. Comme ω_{res} et ω_0 sont proches, une petite erreur de lecture entraîne une grosse erreur relative sur ω_c et m.